Б.П. РОДИН

МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

Б.П. РОДИН

МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2020

УДК 517.91(075.8)
Р60

Родин, Б.П.

Р60 Методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / Б.П. Родин; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2020 – 80 с.

Пособие соответствует программе одноименного курса, читаемого магистрам БГТУ. В нем отобран материал из классических учебников, который по содержанию, стилю изложения и объему может быть усвоен за один семестр студентом, прослушавшим стандартный курс математики в бакалавриате технического вуза.

УДК 517.91(075.8)

Р е ц е н з е н т канд. техн. наук *В.Ю. Емельянов*

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

1. Система обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Определение решения системы. Теорема существования и единственности решения системы

Дифференциальное уравнение первого порядка связывает три переменные величины: неизвестную функцию $x(t)$, ее производную $\dot{x}(t)$ и независимую переменную t и в общем случае имеет вид

$$F(t, x, \dot{x}) = 0. \tag{1.1}$$

Если удается разрешить это уравнение относительно производной и записать в виде

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.2}$$

то говорят о дифференциальном уравнении первого порядка, разрешенном относительно производной.

Когда рассматривается система дифференциальных уравнений для n неизвестных функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, связывающая эти функции, их производные и независимую переменную t, и удается разрешить ее относительно производных $\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)$, то эту систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

называют *нормальной*.

Введем векторные функции

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \vec{x}) \end{pmatrix}$$

и запишем нормальную систему в векторной форме:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}). \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что правые части $f_1, \dots, f_n$ системы определены и непрерывны в некоторой области G пространства R^{n+1}, в котором координатами точки являются числа $t, x_1, \dots, x_n$.

Приведем определение *решения системы* дифференциальных уравнений. Решением системы уравнений

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$$

называется вектор-функция $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, определенная на некотором интервале (t_1, t_2) и обращающая уравнение (1.3) в тождество $\frac{d\vec{\varphi}(t)}{dt} \equiv \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$ на всем интервале (t_1, t_2). Для подстановки необходимо, чтобы вектор-функция $\vec{\varphi}(t)$ имела производные в каждой точке интервала (t_1, t_2) и правая часть $\vec{f}(t, \vec{x})$ была определена для всех подставляемых в нее значений, т.е. $(t, \vec{\varphi}(t)) \in G$ при $t \in (t_1, t_2)$.

Промежуток (t_1, t_2) называется *интервалом определения решения.*

З а м е ч а н и я 1. Из определения следует, что решение $\vec{\varphi}(t)$ имеет производную. Эта производная непрерывна на (t_1, t_2) в силу тождества $\frac{d\vec{\varphi}(t)}{dt} \equiv \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$.

2. Функция $\vec{\varphi}(t) = -\frac{1}{t}$ обращает в тождество уравнение $\dot{x} = x^2$ на множестве $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, но не является решением на этом множестве. Можно говорить о двух различных решениях. Одно из них $\vec{\varphi}(t) = -\frac{1}{t}$ на промежутке $(-\infty, 0)$, второе $\vec{\varphi}(t) = -\frac{1}{t}$ на промежутке $(0, +\infty)$.

Сформулируем *теорему существования и единственности решения* для нормальной системы.

***Теорема* 1.** Пусть правые части системы (1.3) определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial f_i(t, \vec{x})}{\partial x_j}$ $(i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, n)$ в некоторой области $G \subset R^{n+1}$. Тогда для каждой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, определенное на некотором интервале, содержащем точку t_0, и удовлетворяющее условию $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$. При этом если имеются два каких-либо решения $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{x}=\vec{\psi}(t)$ системы (1.3), удовлетворяющих условию $\vec{\varphi}(t_0)=\vec{\psi}(t_0)=\vec{x}_0$, причем каждое решение определено на своем собственном интервале значений переменной t, содержащем точку t_0, то эти решения совпадают на пересечении их интервалов определения.

Замечания. 1. Следует обратить внимание на то, что частные производные $\frac{\partial f_i(t,\vec{x})}{\partial x_j}$ $(i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n)$, непрерывность которых предполагается в условии теоремы, берутся только по переменным $x_1,\dots,x_n$, а не по независимой переменной t.

2. Условие $\vec{\varphi}(t_0)=\vec{x}_0$, которому удовлетворяет решение, называют *начальным условием*, а значения t_0, $\vec{x}_0$, которые фигурируют в начальном условии, – *начальными значениями*. Поэтому говорят, что решение $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ удовлетворяет начальному условию $\vec{\varphi}(t_0)=\vec{x}_0$ или имеет начальные значения t_0, $\vec{x}_0$.

3. В теореме существования и единственности для нормальной системы утверждается, что для любых начальных значений $(t_0,x_0)\in G$ существует решение $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ с этими начальными значениями (*существование решения*). Далее утверждается, что если имеются два решения с одинаковыми начальными значениями, каждое из которых определено на своем интервале, содержащем t_0, то эти решения совпадают на пересечении этих интервалов (*единственность решения*).

Решение $\vec{x}=\vec{\psi}(t)$ системы (1.3), определенное на интервале (t_3,t_4), называют *продолжением решения* $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ той же системы, определенного на интервале (t_1,t_2), если $(t_1,t_2)\subset(t_3,t_4)$ и $\vec{\varphi}(t)=\vec{\psi}(t)$ при $t\in(t_1,t_2)$.

Решение называется *непродолжаемым*, если не существует отличного от него решения, являющегося его продолжением.

Можно доказать, что любое решение может быть продолжено до не продолжаемого единственным образом.

Замечание. Не следует думать, что если правая часть (1.3) определена при всех $t\in(-\infty,+\infty)$ и всех $\vec{x}\in R^n$ (т.е. $G=R^{n+1}$), то непродолжаемое решение будет определено при всех $t\in(-\infty,+\infty)$. Например, правая часть уравнения $\dot{x}=x^2$ определена всюду, но решение $x = -\frac{1}{t}$ с начальными значениями $t_0 = -1,\ x_0 = 1$ является непродолжаемым вправо за точку $t = 0$, так как уходит на бесконечность.

Такое не происходит с решениями линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t); i = 1, \dots, n,$$

которую будем записывать в векторно-матричной форме:

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t). \tag{1.4}$$

***Теорема* 2.** Если коэффициенты $a_{ij}(t)$ и свободные члены $b_i(t)$ нормальной линейной системы (1.4) определены и непрерывны при $t \in (s_1, s_2)$, то для любых начальных значений t_0, $\vec{x}_0$ при условии $t_0 \in (s_1, s_2)$ существует решение, определенное на всем интервале (s_1, s_2).

Из этой теоремы следует, что если коэффициенты и свободные члены (1.4) определены при всех t, то для любых начальных данных существует решение, определенное на всем бесконечном интервале.

Решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ системы (1.3) определяет в пространстве R^{n+1} с координатами $t, x_1, \dots, x_n$ кривую с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} t = t, \\ x_1 = \varphi_1(t), \\ \quad \vdots \\ x_n = \varphi_n(t), \end{cases} t \in (t_1, t_2). \tag{1.5}$$

Эту кривую называют *интегральной кривой*.

Если выполнены условия теоремы существования и единственности решения (1.3), то через каждую точку $(t_0, \vec{x}_0) \in G \subset R^{n+1}$ проходит единственная интегральная кривая, которая в каждой своей точке имеет касательную. Множество этих касательных образует *поле направлений* в области $G \subset R^{n+1}$.

Найдем направляющий вектор касательной к интегральной кривой, проходящей через точку $(t_0, \vec{x}_0) \in G$. Дифференцирование параметрических уравнений (1.5) в точке $(t_0, \vec{x}_0) \in G$ по t дает компоненты этого направляющего вектора:

$$1; \dot{\varphi}_1(t_0), \dots, \dot{\varphi}_n(t_0)\ . \tag{1.6}$$

С учетом того, что для $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ выполняется тождество $\frac{d\vec{\varphi}(t)}{dt} \equiv \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$ для всех t из интервала определения решения и t_0 принадлежит этому интервалу, компоненты направляющего вектора можно представить в виде

$$1; \dot{f}_1(t_0, \vec{x}_0), \dots, \dot{f}_n(t_0, \vec{x}_0). \tag{1.7}$$

Таким образом, поле направлений задается правой частью нормальной системы (1.3).

Решения нормальной системы интерпретируются геометрически в виде интегральных кривых в $(n+1)$-мерном пространстве с координатами $t, x_1, \dots, x_n$, а сама система − с помощью поля направлений в этом пространстве R^{n+1}.

Приведем пример применения теоремы 1. Решим нормальную линейную систему уравнений

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x\ . \tag{1.8}$$

Множеством G для нее является все трехмерное пространство с координатами t, x, y. Непосредственно проверяется, что система функций

$$x = c_1 \cos(\omega t + c_2)\ , \ \ y = c_1 \sin(\omega t + c_2), \tag{1.9}$$

где c_1 и c_2 − произвольные постоянные, представляет собой решение системы (1.8). Для того чтобы показать, что, выбирая надлежащим образом постоянные c_1 и c_2, можно получить по формуле (1.9) произвольное решение, зададимся начальными значениями t_0, x_0, y_0 и покажем, что среди решений (1.9) имеется решение с этими начальными значениями. Мы получаем для постоянных c_1 и c_2 условия

$$c_1 \cos(\omega t_0 + c_2) = x_0, \quad c_1 \sin(\omega t_0 + c_2) = y_0\,. \tag{1.10}$$

Пусть ρ и φ – полярные координаты точки (x_0, y_0), так что $x_0 = \rho\cos\varphi$, $y_0 = \rho\sin\varphi$. Тогда уравнения (1.10) переписываются в виде

$$c_1 \cos(\omega t_0 + c_2) = \rho\cos\varphi, \quad c_1 \sin(\omega t_0 + c_2) = \rho\sin\varphi.$$

Полагая $c_1 = \rho$, $c_2 = \varphi - \omega t_0$, мы, очевидно, выполним условия (1.10). Таким образом, через каждую точку (t_0, x_0, y_0) проходит решение, задаваемое формулой (1.9). В силу теоремы 1 (единственность) формула (1.9) охватывает совокупность всех решений.

2. Автономная нормальная система. Фазовое пространство этой системы. Фазовые траектории автономной системы

Автономной или *динамической* называют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, если в нее явно не входит независимая переменная t, которую будем интерпретировать как время.

В векторной записи автономная нормальная система имеет вид

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}). \tag{2.1}$$

Автономность системы (2.1) заключается в том, что ее правая часть $\vec{f}(\vec{x})$ является вектор-функцией переменных $x_1, \dots, x_n$ и не зависит от времени t.

Будем предполагать, что условия теоремы существования и единственности решения выполнены в некоторой области $G \subset R^n$, в которой координатами точки являются $(x_1, \dots, x_n)$. Область G может быть как ограниченной, так и неограниченной. В частности, она может совпадать со всем пространством R^n. Таким образом, предполагаем непрерывность функций

$$f_i(x_1, \dots, x_n), \qquad \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \; (i, j = 1,2, \dots, n)$$

на множестве G. В дальнейшем будем применять обозначение

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Непосредственным следствием автономности является следующее свойство решений системы (2.1). Если $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ есть решение автономной системы, то $\vec{x} = \vec{\varphi}(t + c)$, где c – константа, также есть решение этой системы. Введем обозначение $\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t + c)$ и докажем, что $\vec{\psi}(t)$ – решение. Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\vec{\psi}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t + c).$$

В тождестве $\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t) = \vec{f}\big(\vec{\varphi}(t)\big)$, которое имеет место для решения $\vec{\varphi}(t)$, заменим t на $t + c$:

$$\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t + c) = \vec{f}\big(\vec{\varphi}(t + c)\big).$$

С учетом введенного обозначения это тождество означает, что

$$\frac{d}{dt}\vec{\psi}(t) = \vec{f}\left(\vec{\psi}(t)\right),$$

т.е. $\vec{x} = \vec{\varphi}(t + c) = \vec{\psi}(t)$ – решение. Например, из того, что $x = e^t$ – решение уравнения $\dot{x} = x$, следует, что $x = e^{t+c}$ – тоже решение этого уравнения.

Каждое решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ автономной системы (2.1) определяет движение точки с координатами $x_1, \dots, x_n$ в пространстве R^n. Траекторию этого движения называют *фазовой траекторией*. Фазовая траектория дает менее полное представление о решении, чем сам процесс движения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$. Часто эту неполноту восполняют указанием на фазовой траектории направления движения по этой траектории.

Если наряду с решением $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ рассматривается другое решение $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ той же системы (2.1), то фазовые траектории, соответствующие этим решениям, либо не пересекаются в R^n, либо совпадают. Пусть фазовые траектории имеют общую точку

$$\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\psi}(t_2)\,. \tag{2.2}$$

Положим $c = t_1 - t_2$ и $\vec{\gamma}(\mathrm{t}) = \vec{\varphi}(t + c)$. В силу свойств автономной системы $\vec{\gamma}(t)$ есть решение этой системы. Из (2.2) следует равенство

$$\vec{\gamma}(t_2) = \vec{\varphi}(t_2 + c) = \vec{\varphi}(t_1) = \vec{\psi}(t_2),$$

из которого видно, что решения $\vec{\gamma}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ имеют в момент t_2 одинаковые начальные значения и в силу теоремы единственности совпадают:

$$\vec{\psi}(t) = \vec{\gamma}(t) = \vec{\varphi}(t + c).$$

Таким образом, область $G \subset R^n$, в которой задана правая часть автономной системы $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, расслаивается на непересекающиеся фазовые траектории. Это пространство называют *фазовым пространством* автономной системы. Качественная теория динамических систем занимается изучением разбиения области G на траектории. Существенной частью этого изучения является установление возможного характера отдельных траекторий.

Пусть в некоторой точке $\vec{a} \in G \subset R^n$ правая часть автономной системы равна нулю. В этом случае точка $\vec{a}$ называется *точкой покоя* или *положением равновесия* автономной системы. Вектор-функция $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{a}$ при $\vec{f}(\vec{a}) = 0$ является решением (2.1). Положение равновесия $\vec{a}$ является целой траекторией. Поскольку фазовые траектории не пересекаются, другие фазовые траектории не входят в точку покоя, а могут неограниченно приближаться к ней.

Кривую называют *гладкой*, если в каждой своей точке она имеет ненулевой касательный вектор. Например, кривая с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = t^2, \end{cases} t \in (-\infty, +\infty)$$

имеет касательный вектор с компонентами $\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = 2t$. Длина этого вектора $\dot{\vec{x}} = \sqrt{1+4t^2}$ ни при каком t не обращается в нуль, поэтому эта кривая (парабола) является гладкой. Кривая

$$\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = |t|, \end{cases} t \in (-\infty, +\infty)$$

не имеет касательной в точке $(0,0)$ и гладкой в этой точке не является. Кривая

$$\begin{cases} x_1 = t - \mathrm{sint}, \\ x_2 = 1 - \mathrm{cost}, \end{cases} t \in (-\infty, +\infty)$$

имеет касательный вектор в каждой своей точке:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - \mathrm{cost}, \\ \dot{x}_2 = \mathrm{sint}, \end{cases} t \in (-\infty, +\infty),$$

но этот вектор обращается в нулевой при $t = 2\pi k$, где k – целое число. В точках, соответствующих значениям параметра $t = 2\pi k$, гладкость кривой нарушается.

Фазовая траектория уравнения (2.1), отличная от положения равновесия и задаваемая решением $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ этого уравнения, в любой своей точке $\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(t_0)$ имеет касательный вектор $\dot{\vec{\varphi}}(t_0) = \vec{f}(\vec{\varphi}(t_0)) \neq 0$, т.е. является *гладкой кривой*.

Можно доказать, что возможны только три типа фазовых траекторий: 1) точка, 2) замкнутая гладкая кривая (цикл), 3) гладкая кривая без самопересечений.

Если решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ определяет в фазовом пространстве замкнутую гладкую кривую, т.е. цикл, то это решение периодично:

$$\vec{\varphi}(t+T) = \vec{\varphi}(t), \ \ T > 0.$$

В качестве примера рассмотрим фазовые траектории автономной системы первого порядка: $\dot{x} = x^2 - 1$. Фазовое пространство этой системы одномерно. Приравнивая нулю правую часть: $x^2 - 1 = 0$, найдем точки, в которых фазовая скорость равна нулю, т.е. точки покоя: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Эти точки разбивают фазовую прямую на три открытых промежутка: $(-\infty, -1)$, $(-1,1)$, $(1, +\infty)$, являющихся фазовыми траекториями. На первом и на третьем промежутке фазовая скорость положительна, изображающая точка по этим траекториям движется вправо. На промежутке $(-1,1)$ фазовая скорость отрицательна и изображающая точка движется влево.

Сопоставим геометрическую интерпретацию решений (2.1) в пространстве R^{n+1}, которое иногда называют *расширенным фазовым пространством*, и геометрическую интерпретацию в фазовом пространстве R^n. Геометрическая интерпретация решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ системы (2.1) ставит в соответствие этому решению кривую K в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $t, x_1, \dots, x_n$, называемую интегральной кривой. Здесь t является одной из координат в пространстве R^{n+1}. Переход к интерпретации в n-мерном фазовом пространстве переменных $x^1, \dots, x^n$ заключается в том, что мы перестаем считать величину t координатой точки, а считаем ее параметром. Таким образом, фазовая траектория L получается из кривой K в результате проецирования пространства R^{n+1} на пространство R^n в направлении оси t.

Геометрическую наглядность это проецирование приобретает при $n = 2$. В этом случае пространство R^{n+1} трехмерно, а пространство R^n представляет собой плоскость. Например, каждое решение автономной системы уравнений

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x$$

записывается в виде

$$x = r \cdot \cos(\omega t + \alpha), \quad y = r \cdot \sin(\omega t + \alpha),$$

где r и α – константы. Решение определяет в трехмерном пространстве переменных t, x, y винтовую спираль при $r \neq 0$ и прямую линию при $r = 0$. В фазовой плоскости R^2 переменных x и y решение определяет окружность при $r \neq 0$ и точку (положение равновесия) при $r = 0$. Переход от кривых в пространстве R^3 к кривым на плоскости R^2 осуществляется проецированием в направлении оси t на координатную плоскость xy.

Таким образом, автономная система в фазовом пространстве определяет векторное поле фазовых скоростей, а в расширенном фазовом пространстве − поле направлений. Решение автономной системы в фазовом пространстве определяет фазовую траекторию, а в расширенном фазовом пространстве – интегральную кривую.

Рассмотрим свойство решений автономной системы, которое называют *групповым свойством*. Обозначим через $\vec{x}(t;\vec{x}_0)$ решение начальной задачи для (2.1), принимающее значение $\vec{x}_0$ при $t=0$, т.е. $\vec{x}(0;\vec{x}_0)=\vec{x}_0$. Тогда

$$\vec{x}(t_1+t_2;\vec{x}_0)=\vec{x}(t_2;\vec{x}(t_1;\vec{x}_0))\ . \qquad (2.3)$$

Действительно, вектор-функции $\vec{\varphi}(t)=\vec{x}(t;\vec{x}(t_1;\vec{x}_0))$ и $\vec{\psi}(t)=\vec{x}(t+t_1;\vec{x}_0)$ являются решениями (2.1). При $t=0$ они принимают одинаковые значения:

$$\vec{\varphi}(0)=\vec{x}(t_1), \qquad \vec{\psi}(0)=\vec{x}(t_1).$$

По теореме о единственности решения они совпадают, что доказывает (2.3). Полагая в соотношении (2.3) $t_1=t, t_2=-t$, получим

$$\vec{x}(-t;\vec{x}(t;\vec{x}_0))=\vec{x}_0. \qquad (2.4)$$

3. Векторное поле фазовых скоростей. Механическая интерпретация фазовых траекторий. Фазовый поток

Если в каждой точке $\vec{x}$ области $G\subset R^n$ задан n-компонентный вектор $\vec{f}(\vec{x})$, то говорят, что в области G задано *векторное поле*. Задание векторного поля $\vec{f}(\vec{x})$ полностью определяет автономную систему (2.1).

Кривая из области G, в которой задано векторное поле, принадлежит *этому полю*, если касательный вектор в каждой точке кривой совпадает с вектором поля. Фазовые траектории автономной системы (2.1) принадлежат векторному полю $\vec{f}(\vec{x})$.

Точки $\vec{x}$ векторного поля $\vec{f}(\vec{x})$, в которых вектор $\vec{f}(\vec{x})$ обращается в нуль и направление его становится неопределенным, называются *особыми точками* векторного поля. Поэтому положения равновесия автономной системы $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ являются особыми точками векторного поля $\vec{f}(\vec{x})$. Точки векторного поля, в которых длина вектора $\vec{f}(\vec{x})$ отлична от нуля и, следовательно, этот вектор имеет определенное направление, называют *обыкновенными* или *неособыми*. В малой окрестности неособой точки непрерывное векторное поле устроено довольно просто. Если $\vec{f}(\vec{x}_0) \neq 0$, то

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{o}(|\vec{x} - \vec{x}_0|)$$

при $\vec{x}$, близких к $\vec{x}_0$, т.е. векторы в точках, близких к $\vec{x}_0$, имеют примерно ту же длину и то же направление, что и вектор $\vec{f}(\vec{x}_0)$. Соответственно и фазовые траектории в окрестности точки, отличной от положения равновесия, устроены просто.

Если точка $\vec{x}_0$ есть особая точка векторного поля, то длина вектора $\vec{f}(\vec{x})$ стремится к нулю при $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0$, но направление вектора $\vec{f}(\vec{x})$ при этом может меняться весьма произвольно. Поэтому структура векторного поля может быть очень сложной, как и структура соответствующих фазовых траекторий.

Приведем одну из возможных механических интерпретаций динамической системы в R^3. Для этого рассмотрим ламинарное течение жидкости в трехмерном пространстве. Это течение характеризуется тем, что частица жидкости в тот момент времени, в который она проходит через точку $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, имеет скорость $\vec{v}(\vec{x}) = (v_1(\vec{x}), v_2(\vec{x}), v_3(\vec{x}))$. Эта скорость зависит только от точки $\vec{x}$, но не от времени. Если другая частица в другой момент времени пройдет через точку $\vec{x}$, то мгновенная скорость в этой точке будет той же. Таким образом, в пространстве установилось векторное поле скоростей $\vec{v}(\vec{x})$, которое определяет автономную систему

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}),$$

описывающую движение жидкости. Фазовые траектории в этом случае называют *линиями тока*. Линии тока − это траектории частиц жидкости. В общем случае фазовые траектории – это траектории точек $\vec{x}$, определяющих состояние (фазу) системы. Если в начальный момент $t = 0$ автономная (динамическая) система находилась в состоянии (в фазе) $\vec{x}_0$, то с течением времени ее состояние будет меняться в соответствии с движением точки $\vec{x}$ вдоль фазовой траектории $\vec{x} = \vec{x}(t;\ \vec{x}_0)$. Это движение аналогично движению частицы жидкости по линии тока. В жидкости мы можем выделить какой-то объем и проследить, как переместятся частицы жидкости, занимающие этом объем в начальный момент, за некоторое время. Аналогично мы можем выделить в фазовом пространстве динамической системы область $D \subset G$ и проследить, как переместятся фазовые точки, составляющие эту область, за некоторое время. Область D при этом деформируется. Каждая точка $\vec{z} \in D$, принадлежащая D в нулевой момент, переместится к моменту t в точку $\vec{x} = \vec{x}(t;\ \vec{z})$, которую будем считать образом точки $\vec{z}$ при отображении g^t:

$$g^t : z \to \vec{x}(t;\ \vec{z}).$$

Отображение $g^t z = \vec{x}(t;\ \vec{z})$ называют *фазовым потоком*.

Из соотношений (2.3) и (2.4) вытекают следующие групповые свойства отображения g^t:

$$g^{t_1+t_2} = g^{t_1} g^{t_2} = g^{t_2} g^{t_1}, g^t g^{-t} = g^0,$$

где g^0 – тождественное отображение. Если отображение g^t для всех точек фазового пространства определено для любого $t \in R$, получаем *однопараметрическую группу преобразований* фазового пространства, задаваемую динамической системой.

4. Действие фазового потока на область фазового пространства

4.1. Производная определителя квадратной матрицы

Пусть $A(t)$ – квадратная матрица порядка n и $\Delta(t) = \mathrm{det} A(t)$ – ее определитель. Сумму диагональных элементов квадратной матрицы называют следом этой матрицы и обозначают

$$\mathrm{Sp}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Если матрица $A(t)$ дифференцируема и невырождена в точке t, то в этой точке

$$\frac{\dot{\Delta}(t)}{\Delta(t)} = \mathrm{Sp}\left(\frac{dA(t)}{dt} A^{-1}(t)\right). \tag{4.1}$$

Докажем это утверждение. Из формулы Тейлора следует, что

$$A(t+h) = A(t) + h\frac{dA(t)}{dt} + o(h) \text{ при } h \to 0.$$

Преобразуем правую часть этой формулы:

$$A(t+h) = A(t) + h\frac{dA(t)}{dt} A^{-1}(t)A(t) + \ o(h)A^{-1}(t)A(t)$$

и вынесем вправо за скобки множитель $A(t)$:

$$A(t+h) = (E + h\frac{dA(t)}{dt} A^{-1}(t) + \ o(h)A^{-1}(t))A(t).$$

Перепишем последнее соотношение, введя обозначение $B = \frac{dA(t)}{dt} A^{-1}(t)$ и приняв во внимание, что $o(h)A^{-1}(t) = o(h)$. Таким образом,

$$A(t+h) = (E + hB + \ o(h))A(t).$$

Воспользовавшись тем, что определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей, из последнего соотношения получим

$$\Delta(t+h) = \det A(t+h) = \det((E + hB + \ o(h))\Delta(t). \tag{4.2}$$

Рассмотрим подробнее структуру матрицы $E + hB + \ o(h)$ и ее определителя. При этом для простоты ограничимся случаем $n = 2$:

$$\det\big((E + hB + o(h)\big) = \begin{vmatrix} 1 + hb_{11} + o(h) & hb_{12} + o(h) \\ hb_{21} + o(h) & 1 + hb_{22} + o(h) \end{vmatrix} =$$
$$= \big(1 + hb_{11} + o(h)\big)\big(1 + hb_{22} + o(h)\big) -$$
$$-\big(hb_{12} + o(h)\big)\big(hb_{21} + o(h)\big) = 1 + h\mathrm{Sp}B + o(h).$$

С учетом полученного результата можем переписать (4.2) в виде
$$\Delta(t + h) = \det A(t + h) = (1 + h\mathrm{Sp}B + o(h))\Delta(t),$$

что позволяет найти разностное отношение для определителя матрицы $A(t)$ в точке t, соответствующее приращению аргумента h:
$$\frac{\Delta(t+h)-\Delta(t)}{h} = \frac{\big(1+h\mathrm{Sp}B+o(h)\big)\Delta(t)-\Delta(t)}{h} = (\mathrm{Sp}B + \frac{o(h)}{h})\Delta(t).$$

Переходя к пределам в левой и правой частях последнего равенства, найдем значение производной определителя $\Delta(t) = \det A(t)$ в точке t:

$$\dot{\Delta}(t) = \mathrm{Sp}B\Delta(t) = \mathrm{Sp}\left(\frac{dA(t)}{dt}A^{-1}(t)\right)\Delta(t).$$

Последнее соотношение доказывает формулу (4.1), которую при $\Delta(t) > 0$ часто записывают в виде

$$\frac{d}{dt}\ln\Delta(t) = \mathrm{Sp}\left(\frac{dA(t)}{dt}A^{-1}(t)\right). \tag{4.3}$$

Рассмотрим пример применения формулы (4.1). Вычислим определитель матрицы
$$A(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{cost} & -\mathrm{sint} \\ \mathrm{sint} & \mathrm{cost} \end{pmatrix}$$

и найдем его производную:

$$\Delta(t) = \det A(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1;\ \ \dot{\Delta}(t) = 0.$$

Теперь проведем вычисления по формуле (4.1). Производную матрицы находим, дифференцируя покомпонентно:

$$\frac{d}{dt}A(t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{sint} & -\mathrm{cost} \\ \mathrm{cost} & -\mathrm{sint} \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу можно найти, заменяя компоненты матрицы $A(t)$ их алгебраическими дополнениями, поскольку определитель этой матрицы равен единице:

$$A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{cost} & \mathrm{sint} \\ -\mathrm{sint} & \mathrm{cost} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу

$$B = \frac{dA(t)}{dt}A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{sint} & -\mathrm{cost} \\ \mathrm{cost} & -\mathrm{sintt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{cost} & \mathrm{sint} \\ -\mathrm{sint} & \mathrm{cost} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сумма диагональных элементов матрицы B равна нулю, т.е. $\mathrm{Sp}B = 0$, поэтому $\dot{\Delta}(t) = \mathrm{Sp}B\Delta(t) = 0$.

4.2. Дифференцирование решения по параметру. Система в вариациях

Рассмотрим решение $\vec{x} = \vec{x}(t, \alpha)$ автономной системы $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, которое является дважды непрерывно дифференцируемой функцией по совокупности переменных t, α.Производная решения по параметру $\frac{\partial \vec{x}(t,\alpha)}{\partial \alpha}$ есть решение системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha}. \qquad (4.4)$$

Запишем систему дифференциальных уравнений (4.4), обозначив искомую вектор-функцию символом $\vec{y}$:

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}(t,\alpha))}{\partial \vec{x}}\vec{y}(t). \qquad (4.5)$$

Система (4.5) есть линейная система дифференциальных уравнений, поскольку матрица

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

вычисляется вдоль рассматриваемого решения $\vec{x} = \vec{x}(t, \alpha)$ уравнения $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$.

Для доказательства соотношения (4.4) достаточно подставить решение $\vec{x} = \vec{x}(t, \alpha)$ в уравнение $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ и продифференцировать полученное тождество по параметру α:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha}; \quad i = 1, \dots, n. \qquad (4.6)$$

Если учесть, что $\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial t} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial \alpha}$, то (4.6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha}; \quad i = 1, \dots, \mathrm{n},$$

который в векторно-матричной форме эквивалентен (4.4). Дифференциальное уравнение (4.5) *называют уравнением в вариациях*.

Рассмотрим пример уравнения в вариациях при $n = 1$. Для этого найдем решение автономного уравнения

$$\dot{x} = x^2, \qquad (4.7)$$

удовлетворяющего начальному условию $x(-1) = \alpha$. Разделяя переменные этого уравнения, найдем, что искомое решение удовлетворяет соотношению

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{dy}{y^2} = \int_{-1}^{t} d\tau,$$

которое после интегрирования принимает вид

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} = t + 1. \qquad (4.8)$$

Из (4.8) находим однопараметрическое семейство решений:

$$x(t,\alpha) = -\frac{1}{t+1-\frac{1}{\alpha}}, \tag{4.9}$$

где параметр α является значением решения при $t = -1$. Выделим из этого семейства одно решение, отвечающее $\alpha = 1$:

$$x(t,1) = -\frac{1}{t}. \tag{4.10}$$

Решение (4.10) определено на промежутке $(-\infty, 0)$, и в каждой точке этого промежутка нас интересует скорость изменения решения (4.10) при изменении его значения в момент $t = -1$, т.е. значения частной производной $\frac{\partial x(t,\alpha)}{\partial\alpha}$ при $\alpha = 1$. Очевидно, значение этой производной в момент $t = -1$ равно единице. Определим $\frac{\partial x(t,1)}{\partial\alpha}$ из уравнения в вариациях (4.5), которое в нашем случае принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2}{t}y;\ \ y(-1) = 1. \tag{4.11}$$

Решая начальную задачу (4.11), находим

$$y(t) = e^{\int_{-1}^{t} -\frac{2}{\tau}d\tau} = e^{lnt^{-2}} = \frac{1}{t^2}\,.$$

Таким образом, $\frac{\partial x(t,1)}{\partial\alpha} = \frac{1}{t^2}$. Этот же результат можно получить в данном примере, непосредственно дифференцируя правую часть (4.9) по α и полагая $\alpha = 1$.

Обозначим через $\vec{x}(t;\vec{z})$ решение начальной задачи для системы $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, принимающее значение $\vec{z}$ при $t = 0$, т.е. $\vec{x}(0;\vec{z}) = \vec{z}$. Это решение зависит от n параметров $z_1, \dots, z_n$. Производная решения по каждому из этих параметров является решением уравнения в вариациях (4.4):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{x}}{\partial z_i} = \frac{\partial\vec{f}(\vec{x})}{\partial\vec{x}}\frac{\partial\vec{x}}{\partial z_i}; i = 1, \dots, n. \tag{4.12}$$

Поэтому матрица $\frac{\partial\vec{x}(t;\vec{z})}{\partial\vec{z}}$, столбцы которой $\frac{\partial\vec{x}}{\partial z_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ – решения уравнения (4.12), является решением матричного уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{z}} = \frac{\partial\vec{f}(\vec{x})}{\partial\vec{x}}\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{z}}. \qquad (4.13)$$

4.3. Формула и теорема Лиувилля

Для определителя матрицы

$$\frac{\partial\vec{x}(t;\vec{z})}{\partial\vec{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

введем обозначение

$$J(t,\vec{z}) = \det\frac{\partial\vec{x}(t;\vec{z})}{\partial\vec{z}}. \qquad (4.14)$$

Если этот определитель не равен нулю, то его логарифмическая производная равна дивергенции векторного поля фазовых скоростей автономной системы $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$:

$$\frac{d}{dt}\ln J(t,\vec{z}) = \mathrm{div}\vec{f}\big(\vec{x}(t;\vec{z})\big) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \qquad (4.15)$$

Формулу (4.15) называют *формулой Лиувилля*. Для ее доказательства воспользуемся формулой дифференцирования определителя квадратной матрицы (4.3) и соотношением (4.13):

$$\frac{d}{dt}\ln J(t,\vec{z}) = \mathrm{Sp}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{x}(t;\vec{z})}{\partial\vec{z}}\frac{\partial\vec{x}(t;\vec{z})}{\partial\vec{z}}^{-1}\right) =$$

$$= \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial\vec{f}(\vec{x})}{\partial\vec{x}}\frac{\partial\vec{x}(t;\vec{z})}{\partial\vec{z}}\frac{\partial\vec{x}(t;\vec{z})}{\partial\vec{z}}^{-1}\right) = \mathrm{Sp}\frac{\partial\vec{f}(\vec{x})}{\partial\vec{x}} = \mathrm{div}\vec{f}\big(\vec{x}(t;\vec{z})\big).$$

Запишем формулу Лиувилля в форме

$$\frac{d}{dt}J(t,\vec{z}) = \mathrm{Sp}\,\frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}}J(t,\vec{z}), \tag{4.16}$$

из которой следует, что якобиан $J(t,\vec{z})$ является решением линейного уравнения и, следовательно,

$$J(t,\vec{z}) = e^{\int_0^t \mathrm{Sp}\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}(\tau,\vec{z}))}{\partial \vec{x}}d\tau}J(0,\vec{z}). \tag{4.17}$$

Поскольку $\vec{x}(0,\vec{z}) = \vec{z}$ и $\frac{\partial \vec{x}(0;\vec{z})}{\partial \vec{z}}$ является единичной матрицей, то $J(0,\vec{z}) = 1$. Отсюда следует положительность якобиана в любой момент времени:

$$J(t,\vec{z}) = e^{\int_0^t \mathrm{Sp}\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}(\tau,\vec{z}))}{\partial \vec{x}}d\tau} > 0. \tag{4.18}$$

Выделим в фазовом пространстве в момент $t = 0$ ограниченную область D_0, имеющую объем V_0. Под действием фазового потока точки этой области будут двигаться по фазовым траекториям и за время t область D_0 перейдет в область D_t с объемом V_t.

Теорема Лиувилля. Скорость изменения объема ограниченной области фазового пространства под действием фазового потока равна интегралу по этой области от дивергенции поля фазовых скоростей:

$$\frac{dV_t}{dt} = \int \mathrm{div}\vec{f}(\vec{x})d\vec{x}, \quad \vec{x} \in D_t. \tag{4.19}$$

Для доказательства теоремы Лиувилля отметим, что элемент объема $d\vec{x} = dx_1dx_2 \dots dx_n$ в окрестности точки $\vec{x} = \vec{x}(t,\vec{z}) \in D_t$ связан с элементом объема $d\vec{z} = dz_1dz_2 \dots dz_n$ в окрестности прообраза $\vec{z} \in D_0$ точки $\vec{x} = \vec{x}(t,\vec{z})$ соотношением $d\vec{x} = J(t,\vec{z})d\vec{z}$. Поэтому объем области D_t можно вычислить интегрированием либо по области D_t:

$$V_t = \int d\vec{x}\ ,(\vec{x} \in D_t)\ ,$$

либо по области D_0:

$$V_t = \int J(t,\vec{z})d\vec{z}\ ,(\vec{z} \in D_0). \tag{4.20}$$

Остановимся на втором варианте и найдем скорость изменения объема области D_t дифференцированием под знаком интеграла (4.20):

$$\frac{dV_t}{dt} = \int \frac{d}{dt} J(t, \vec{z}) d\vec{z}, \ \ \vec{z} \in D_0. \qquad (4.21)$$

Производную якобиана под знаком интеграла (4.21) преобразуем по формуле Лиувилля (4.16):

$$\frac{dV_t}{dt} = \int \mathrm{Sp} \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} J(t, \vec{z}) d\vec{z}, \ \ \vec{z} \in D_0. \qquad (4.22)$$

Наконец получим формулу (4.19), переходя в правой части (4.22) к интегрированию по области D_t:

$$\frac{dV_t}{dt} = \int \mathrm{Sp} \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} d\vec{x}, \ \ \vec{x} \in D_t. \qquad (4.23)$$

Теорема Лиувилля для линейной автономной системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ позволяет достаточно просто выразить объем V_t через начальный объем V_0, поскольку в этом случае дивергенция векторного поля фазовых скоростей одинакова для всех точек фазового пространства и равна следу матрицы A:

$$\mathrm{div} \vec{f}(\vec{x}) = \mathrm{Sp} \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \mathrm{Sp} A. \qquad (4.24)$$

В этом линейном случае соотношение (4.23) с учетом (4.24) принимает вид

$$\frac{dV_t}{dt} = \int \mathrm{Sp} A d\vec{x}, \ \ \vec{x} \in D_t$$

и постоянная $\mathrm{Sp}A$ выносится за знак интеграла:

$$\frac{dV_t}{dt} = \mathrm{Sp} A \int d\vec{x}, \ \ \vec{x} \in D_t. \qquad (4.25)$$

Поскольку $\int d\vec{x}$ при интегрировании по области D_t равен V_t, соотношение (4.25) есть линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dV_t}{dt} = \mathrm{Sp} A V_t,$$

которое имеет решение

$$V_t = e^{t\,\mathrm{Sp}A} V_0. \tag{4.26}$$

Например, для линейной автономной системы

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

след матрицы системы равен двум

$$\mathrm{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

поэтому фазовый объем под действием фазового потока меняется по закону $V_t = e^{2t} V_0$. Данная линейная система распадается на два независимых дифференциальных уравнения, которые имеют решения:

$$\begin{cases} x_1 = e^t x_{10}, \\ x_2 = e^t x_{20}. \end{cases}$$

В векторной форме это решение системы можно записать в форме $\vec{x} = e^t \vec{x}_0$, из которой видно, что фазовые траектории, отличные от точки покоя, суть лучи, исходящие из начала координат. Преобразование области D_0 фазовым потоком за время t в область D_t есть гомотопия (преобразование подобия) с центром в начале координат и коэффициентом подобия e^t. Таким образом, линейные размеры «фазовой капли» за время t увеличиваются в e^t раз, а площадь (фазовый объем) – в e^{2t} раз.

Векторное поле, у которого дивергенция (расходимость) равна нулю, называется векторным полем без источников и стоков или соленоидальным (трубчатым). Фазовый поток автономной системы, у которой поле фазовых скоростей соленоидально, сохраняет фазовый объем.

Например, у линейной автономной системы $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ векторное поле фазовых скоростей соленоидально, поскольку след матрицы системы равен нулю:

$$\operatorname{Sp}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = 0.$$

Если в момент $t = 0$ на фазовой плоскости выделить квадрат с вершинами (0,0), (1,0), (1,1) и (0,1), то под действием фазового потока этот квадрат превратится в прямоугольник, высота которого уменьшается, а длина растет, но площадь (фазовый объем) остается равным единице.

Важным примером автономной системы, сохраняющей фазовый объем, является гамильтонова система. Например, для гамильтоновой системы второго порядка уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases}\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p},\\[2mm] \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q}.\end{cases} \tag{4.27}$$

Если обозначить

$$\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix} = \vec{x} \text{ и } \begin{pmatrix}\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p}\\[2mm] -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q}\end{pmatrix} = \vec{f}(\vec{x}),$$

то (4.27) принимает вид $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$. Таким образом,

$$\operatorname{Sp}\frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \operatorname{Sp}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^2}\\[2mm] -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q^2} & -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = 0,$$

а равенство нулю дивергенции векторного поля фазовых скоростей говорит о сохранении фазового объема фазовым потоком.

5. Линейные автономные системы

Автономная система с уравнением движения $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где $A - n \times n$ матрица с числовыми элементами, называется линейной автономной системой или системой n линейных однородных уравнений.

Решение этой системы с начальным условием $\vec{\varphi}(0) = \vec{x}_0$ дается в случае $n = 1$ экспонентой

$$\vec{\varphi}(t) = e^{At}\vec{x}_0.$$

Оказывается, и в общем случае решение дается той же формулой: нужно только уяснить, что называется экспонентой матрицы.

5.1. Понятие предела в линейной алгебре

Определим понятие предела для столбцов, которые мы отождествляем с векторами арифметического пространства в их естественном представлении, и для квадратных матриц.

Пусть дана последовательность векторов

$$\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(k)}, \dots$$

Компоненты *k*-го вектора этой последовательности обозначим $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$. Если у каждой компоненты существует предел $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$, то вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ называется пределом последовательности $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(k)}, \dots$, а сама последовательность называется сходящейся к вектору $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Это записывается в виде $\vec{x}^{(k)} \to \vec{x}$ или $\lim_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x}$.

Таким же образом, если имеется последовательность квадратных матриц $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}, \dots$, то элементы *k*-й матрицы этой последовательности обозначим $a_{i,j}^{(k)}$ и пределом последовательности матриц назовем матрицу с элементами $a_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}$, если все эти пределы существуют.

В соответствии с этим определением предела, бесконечный ряд векторов

$$\vec{x}^{(1)} + \vec{x}^{(2)} + \dots + \vec{x}^{(k)} + \dots$$

называется сходящимся, если существует

$$\lim_{k\to\infty}(\vec{x}^{(1)} + \vec{x}^{(2)} + \dots + \vec{x}^{(k)}),$$

и этот предел называется суммой данного ряда. Очевидно, что для сходимости ряда векторов необходимо и достаточно, чтобы сходились все ряды из одноименных компонент; суммы этих рядов являются компонентами суммы ряда векторов.

Аналогичным образом определяется понятие сходимости ряда из матриц. Для матриц, элементы которых являются дифференцируемыми функциями от некоторого параметра t, естественным образом определяется дифференцирование по этому параметру. Именно,

$$\frac{d}{dt}A(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(A(t+h) - A(t)).$$

Если

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

то, очевидно,

$$A'(t) = \begin{pmatrix} a'_{11}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Легко установить следующие правила дифференцирования:

$$\frac{d}{dt}(A_1 + A_2) = \frac{dA_1}{dt} + \frac{dA_2}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}(cA) = c\frac{dA}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}(A_1A_2) = \frac{dA_1}{dt}A_2 + A_1\frac{dA_2}{dt}.$$

5.2. Норма матрицы

Норму можно вводить различными способами, и в различных случаях та или другая норма оказывается более удобной.

Под нормой матрицы A понимается неотрицательное число $\| A \|$, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1) $\| O \| = 0$, и обратно, если $\| A \| = 0$, матрица A − нулевая;

2) $\| \alpha A \| = |\alpha| \, \| A \|$, где α − любое комплексное число;

3) $\| A+B \| \leq \| A \| + \| B \|$, где A и B − любые матрицы, допускающие сложение;

4) $\| AB \| \leq \| A \| * \| B \|$, где A и B − любые матрицы, допускающие умножение. В частности, для квадратной матрицы:

$$\| A^p \| \leq \| A \|^p,$$

где p − натуральное число.

Из 2) и 3) вытекает

$$\| A-B \| \leq \| A \| + \| B \|.$$

Наиболее часто применяют следующие нормы:

$$\| A \|_I = \max(j) \textstyle\sum_k |a_{jk}|;$$
$$\| A \|_{II} = \max(k) \textstyle\sum_j |a_{jk}|;$$
$$\| A \|_{III} = \left\{\textstyle\sum_{j,k} |a_{jk}|^2\right\}^{1/2} \equiv (\mathrm{Sp}A^* A)^{1/2}.$$

Для вектора-столбца

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

эти нормы имеют, соответственно, следующие значения:

$$\| x \|_I = \max(j)\, |x_j|;$$

$$\| x \|_{II} = \textstyle\sum_j |x_j|;$$

$$\| x \|_{III} = \sqrt{\textstyle\sum_j |x_j|^2}.$$

В дальнейшем, если некоторое соотношение окажется выполненным для любой нормы $I - III$, то значок при норме будет опускаться.

Нетрудно проверить, что для приведенных норм выполнены аксиомы 1) – 4). Кроме того, имеет место следующее свойство:

5) $\forall |a_{ij}| \leq \| A \|$.

Отметим еще одно полезное свойство нормы:

$$| \parallel A \parallel - \parallel B \parallel | \leq \parallel A - \quad \parallel.$$

Для сходимости последовательности матриц $A^{(1)}, \; A^{(2)}, \dots, \; A^{(k\ )}$, к матрице необходимо и достаточно, чтобы $\parallel A - \quad ^{(\ k)} \parallel \to 0$ при $k \to \infty$. При этом

$$\lim_{k \to \infty} \parallel \; A^{(\ k)} \parallel = \parallel A \parallel.$$

5.3. Матричные ряды. Экспоненциал матрицы

Опираясь на понятие предела матрицы, вводят понятие матричного ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} A^{(k)},$$

где $A^{(\ k)}$ – матрицы одного и того же типа. Если предел в правой части этого равенства существует, то матричный ряд называется сходящимся и матрица, полученная в пределе, называется суммой этого ряда. Если предела не существует, то матричный ряд называется расходящимся и ему не приписывают никакой суммы.

Теорема (необходимое условие сходимости матричного ряда). Если матричный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A^{(\ k)}$ сходится, то $\lim_{k \to \infty} A^{\ (\ k)} = 0$.

Матричный ряд

$$A^{(1)} + \; A^{(2)} + \dots + \; A^{(\ k)} + \cdots$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд норм

$$\parallel A^{(1)} \parallel + \parallel \; A^{(2)} \parallel + \dots + \parallel A^{(\mathrm{k}\ )} \parallel + \cdots$$

Теорема. Абсолютно сходящийся матричный ряд есть ряд сходящийся.

Доказательство. Из определения сходимости матричного ряда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}\right\}.$$

Так как для всех i и j справедливы неравенства

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \| A^{(k)} \|,$$

то на основании признака сравнения скалярных рядов все ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ абсолютно сходящиеся. Следовательно, матричный ряд

$$A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

также сходится.

Под экспоненциалом квадратной матрицы X понимается матричная функция

$$\exp X \equiv e^{X} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^{p}}{p!}.$$

Матричный ряд $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^{p}}{p!}$ сходится для любой квадратной матрицы X и притом абсолютно. Действительно, составляя соответствующий ряд норм, будем иметь

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|X\|^{p}}{p!} \leq \| E \| + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\|X\|^{p}}{p!} < \infty,$$

что и доказывает наше утверждение.

В частности, применяя первую или вторую нормы, где норма единичной матрицы E равна единице, получаем

$$\| e^{X} \| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|X\|^{p}}{p!} = e^{\|X\|}.$$

Пусть матрицы X и Y перестановочны, т.е.

$$XY = YX.$$

Докажем основное свойство экспоненциала матрицы

$$e^X e^Y = e^{X+Y}.$$

Действительно, в силу абсолютной сходимости рядов

$$e^X e^Y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!} * \sum_{q=0}^{\infty} \frac{Y^q}{q!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{X^p Y^q}{p!q!}.$$

Положим

$$p + q = s \qquad (s = 0, 1, 2, \dots);$$

тогда

$$q = s - p \geq 0, \quad \text{т. е.} \;\; p \leq s,$$

и, следовательно,

$$e^X e^Y = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{s} \frac{X^p Y^{s-p}}{p!(s-p)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{p=0}^{s} \frac{s!}{p!(s-p)!} X^p Y^{s-p}.$$

Так как матрицы X и Y перестановочны, то

$$\sum_{p=0}^{s} \frac{s!}{p!(s-p)!} X^p Y^{s-p} = (X+Y)^s.$$

Отсюда

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{p=0}^{s} \frac{s!}{p!(s-p)!} X^p Y^{s-p} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} (X+Y)^s = e^{X+Y},$$

что и требовалось доказать.

Из основного свойства экспоненциала матрицы, в частности, следует, что $e^X e^{-X} = e^{X-X} = E$, т.е.

$$(e^X)^{-1} = e^{-X}.$$

Отметим еще одно свойство экспоненциала матрицы. Если Y – квадратная матрица, подобная матрице X, т.е.

$$Y = SXS^{-1} \qquad (\det S \neq 0),$$

то

$$e^Y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (SXS^{-1})^p = S\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} X^p\right) S^{-1} = S e^X S^{-1},$$

т.е.

$$\exp(SXS^{-1}) = S(\exp X)S^{-1}.$$

Найдем производную матричной функции e^{At} по параметру t. Так как элементы матрицы

$$e^{At} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} t^p$$

представляют собой целые функции от t, то законно почленное дифференцирование ряда по t и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A^p}{(p-1)!} t^{p-1} = Ae^{At} = e^{At}A.$$

Из полученной формулы вытекает, что матрица

$$X(t) = e^{At}$$

удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dX}{dt} = AX,$$

причем $X(0) = E$. Таким образом, каждый столбец матрицы e^{At} является решением системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, равным соответствующему столбцу единичной матрицы E при $t = 0$. Любое решение системы дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ может быть получено как линейная комбинация столбцов матрицы e^{At}, т.е. общее решение этой системы можно записать в виде

$$\varphi(t, \vec{C}) = e^{At}\vec{C},$$

где $\vec{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ – столбец, составленный из n произвольных постоянных.

Решение системы

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x},$$

удовлетворяющее начальному условию $\vec{\varphi}(0) = \vec{x}_0$, имеет вид

$$\vec{\varphi}(t) = e^{At}\vec{x}_0.$$

Непосредственно проверяется, что решением, удовлетворяющим начальному условию $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$, будет вектор-функция

$$\vec{\varphi}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0.$$

5.4. Собственные значения и собственные векторы линейной автономной системы

Собственными значениями и собственными векторами линейной автономной системы называют собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы A. В качестве примера рассмотрим систему двух уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 5x_2, \quad x_1 = 8 \quad \text{при } t = 0,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 3x_2, \quad x_2 = 5 \quad \text{при } t = 0.$$

Запишем ее в матричной форме. Обозначим вектор неизвестных через $\vec{x}$, его начальное значение через $\vec{x}_0$ и матрицу коэффициентов через A:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \ \ \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \ A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

В этих обозначениях система примет вид

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \ \ \vec{x} = \vec{x}_0 \ \ \text{при} \ \ t = 0.$$

Будем искать решение в виде

$$x_1(t) = e^{\lambda t}h_1,$$
$$x_2(t) = e^{\lambda t}h_2,$$

или в векторной записи

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{h}.$$

Подстановка $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{h}$ в $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ дает $\lambda e^{\lambda t}\vec{h} = Ae^{\lambda t}\vec{h}$ и после сокращения

$$A\vec{h} = \lambda\vec{h}.$$

Это основное уравнение относительно собственного значения λ и собственного вектора $\vec{h}$. Отметим, что это уравнение является нелинейным, поскольку оно содержит произведение обеих неизвестных: λ и $\vec{h}$. Если мы знаем число λ, то уравнение относительно вектора $\vec{h}$ становится линейным. Мы можем записать $\lambda E\vec{h}$ вместо $\lambda\vec{h}$ и перенести этот член в левую часть:

$$(A - \lambda E)\vec{h} = 0.$$

Очевидно, что собственный вектор $\vec{h}$ лежит в нуль-пространстве матрицы

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Здесь имеется одно существенное обстоятельство, а именно: для каждого значения λ вектор $\vec{h} = 0$ всегда удовлетворяет уравнению $A\vec{h} = \lambda\vec{h}$, т.е. нуль-пространство любой матрицы содержит элемент $\vec{h} = 0$. Но нулевой вектор бесполезен при построении решения $\vec{x}(t)$ из экспонент $e^{\lambda t}\vec{h}$. Поэтому нас интересуют только те значения λ, для которых имеется ненулевой собственный вектор $\vec{h}$. Нуль-пространство матрицы $A - \lambda E$ имеет смысл рассматривать только тогда, когда оно содержит некоторый ненулевой вектор, и поэтому ранг этой матрицы должен быть меньше, чем ее порядок. Другими словами, матрица $A - \lambda E$ должна быть вырожденной. Критерий вырожденности дается определителем матрицы.

Число λ будет *собственным значением* матрицы A с соответствующим ненулевым собственным вектором тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Это *характеристическое уравнение* для матрицы A.

В нашем примере

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Характеристический многочлен $\lambda^2 - \lambda - 2$ разлагается в произведение $(\lambda + 1)(\lambda - 2)$, и матрица A имеет два различных собственных значения: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$. Каждому из этих значений соответствует пространство собственных векторов, удовлетворяющих уравнению $A\vec{h} = \lambda\vec{h}$ или $(A - \lambda E)\vec{h} = 0$. Вычисления проводятся отдельно для λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1 = -1: \quad (A - \lambda_1 E)\vec{h} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и решением является любой вектор, кратный вектору $\vec{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = 2: \quad (A - \lambda_2 E)\vec{h} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и решением является любой вектор, кратный вектору $\vec{h}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы определены неоднозначно, поскольку любой вектор из нуль-пространства матрицы $A - \lambda E$ (которое мы называем собственным пространством, соответствующим λ) является собственным вектором, и поэтому нам нужно ввести в этом пространстве базис. В нашем случае оба собственных пространства являются одномерными, и они порождены соответственно векторами $\vec{h}^{(1)}$ и $\vec{h}^{(2)}$.

Отсюда, возвращаясь к дифференциальному уравнению, получаем два чисто экспоненциальных решения:

$$\vec{x} = e^{\lambda_1 t}\vec{h}^{(1)} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{x} = e^{\lambda_2 t}\vec{h}^{(2)} = e^{2t}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку исходное уравнение является линейным и однородным, оно допускает суперпозицию решений, т.е. любая комбинация двух его частных решений

$$\vec{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h}^{(2)},$$

вновь будет его решением. Сюда входят два произвольных параметра, c_1 и c_2, и естественно предполагать, что при надлежащем их выборе будет удовлетворяться начальное условие $\vec{x} = \vec{x}_0$ при $t = 0$:

$$c_1\vec{h}^{(1)} + c_2\vec{h}^{(2)} = \vec{x}_0$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $c_1 = 3$ и $c_2 = 1$, и требуемое решение исходного уравнения есть

$$\vec{x}(t) = 3e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Записывая отдельно каждую из двух компонент, получаем

$$x_1(t) = 3e^{-t} + 5e^{2t},\ \ x_2(t) = 3e^{-t} + 2e^{2t}.$$

Основным здесь было уравнение $A\vec{h} = \lambda\vec{h}$. Большая часть векторов $\vec{h}$ не будет удовлетворять такому уравнению независимо от того, является ли λ собственным значением или нет. Обычно $\vec{h}$ меняет направление после умножения на A, так как вектор $A\vec{h}$ не будет кратным $\vec{h}$. Это означает, что только специальные числа являются собственными значениями и только специальные векторы являются собственными векторами. Разумеется, если A кратна единичной матрице, то ни один из векторов не будет изменять своего направления и все они будут собственными. Но в обычном случае собственных векторов мало.

Дадим обзор некоторых основных фактов, касающихся собственных значений и собственных векторов. Если задана квадратная матрица A порядка n и задача состоит в отыскании тех особых векторов $\vec{h}$, на которых A действует как простое умножение – направления векторов $A\vec{h}$ и $\vec{h}$ совпадают, то сначала находим собственные значения, переписывая $\lambda\vec{h}$ в виде $\lambda E\vec{h}$ и перенося этот член в левую часть уравнения $A\vec{h} = \lambda\vec{h}$, которое принимает вид $(A - \lambda E)\vec{h} = 0$.

Собственный вектор матрицы A есть вектор из нуль-пространства матрицы $A - \lambda E$. Другими словами, основной вопрос состоит в следующем: если матрица A сдвигается на различные кратные единичной матрицы, то какой сдвиг делает ее вырожденной? Эти сдвиги дадут собственные значения, и мы можем затем вычислить собственные векторы.

Чтобы определить, когда $A - \lambda E$ вырождена, мы вычисляем ее определитель. Этот определитель есть многочлен от λ степени n, называемый характеристическим многочленом матрицы A. Уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ есть характеристическое уравнение, и его корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (которые могут быть, а могут и не быть вещественными числами и среди которых могут оказаться или не оказаться повторяющиеся) суть собственные значения матрицы A.

Суммируя, получаем, что каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы λ было собственным значением для A:

1) существует ненулевой вектор $\vec{h}$ такой, что $A\vec{h} = \lambda\vec{h}$;
2) матрица $A - \lambda E$ вырождена;
3) $\det(A - \lambda E) = 0$.

Рассмотрим для примера матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

и все собственные значения вещественны и различны: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. Отдельно для каждого собственного значения λ_i ищем соответствующий собственный вектор $\vec{h}^{(i)}$:

$$\lambda_1 = 0\colon\ (A - 0E)\vec{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{h}^{(1)} = 0 \text{ и } \vec{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 1\colon\ (A - E)\vec{h}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{h}^{(2)} = 0 \text{ и } \vec{h}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_3 = 3\colon\ (A - 3E)\vec{h}^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\vec{h}^{(3)} = 0 \text{ и } \vec{h}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При той же матрице A общее решение дифференциального уравнения $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ будет иметь вид

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h}^{(2)} + c_3 e^{\lambda_3 t}\vec{h}^{(3)} =$$
$$= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сумма n собственных значений равняется сумме n диагональных элементов матрицы A:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Эта сумма является следом матрицы A. Кроме того, произведение n собственных значений равняется определителю матрицы A.

Не следует путать собственные значения матрицы и ее диагональные элементы. Обычно они различны, но есть одна ситуация, в которой они совпадают.

Если матрица A треугольная – она может быть верхней треугольной, нижней треугольной или диагональной, − то собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ в точности совпадают с диагональными элементами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Причина этого явления станет ясна из примера. Если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

то ее характеристический многочлен

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda).$$

Определитель в точности равен произведению диагональных элементов. Очевидно, что корни равны 1, 3, 4; собственные значения сразу находились на главной диагонали.

Есть еще одна ситуация, в которой легко проводить вычисления. Предположим, что мы уже нашли собственные значения и собственные векторы матрицы A. Тогда собственные значения матрицы A^2 в точности равны $\lambda_1^2, \dots, \lambda_2^2$ и каждый собственный вектор матрицы A является также и собственным вектором для матрицы A^2. Если мы попытаемся исследовать $\det(A^2 - \lambda E)$, то мы в нем погрязнем, но если начать с $A\vec{h} = \lambda\vec{h}$, то все становится ясным. Вновь умножая на A, получаем

$$A^2\vec{h} = A\lambda\vec{h} = \lambda A\vec{h} = \lambda^2\vec{h}.$$

Отсюда следует, что λ^2 является собственным значением для A^2 с тем же собственным вектором $\vec{h}$. Если первое умножение на A не изменило направление вектора $\vec{h}$, то же самое будет и при втором, третьем и т.д. Поэтому собственные значения матрицы A^k в точности равны $\lambda_1^k, \dots, \lambda_2^k$ и каждый собственный вектор матрицы A является также и собственным вектором для матрицы A^k.

Опираясь на полученный результат, легко установить, что собственные значения матрицы e^{At} в точности равны $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_2 t}$ и каждый собственный вектор матрицы A является также и собственным вектором для матрицы e^{At}. Действительно, если $\vec{h}$ есть собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ, то

$$e^{At}\vec{h} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} t^p\right)\vec{h} =$$
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p \vec{h}}{p!} t^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^p \vec{h}}{p!} t^p = (\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} t^p)\vec{h} = e^{\lambda t}\vec{h}.$$

5.5. Диагональная форма матрицы

Предположим, что матрица A размера $n \times n$ имеет n линейно независимых собственных векторов. Тогда если взять эти векторы в качестве столбцов матрицы S, то $S^{-1}AS$ будет диагональной матрицей Λ, у которой на диагонали стоят собственные значения матрицы A:

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Матрица $S^{-1}e^{At}S$ будет также диагональной матрицей $e^{\Lambda t}$, у которой на диагонали стоят собственные значения матрицы e^{At}:

$$S^{-1}e^{At}S = \mathrm{e}^{\Lambda \mathrm{t}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ .. & .. & .. \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Расположим собственные векторы $\vec{h}^{(i)}$ в столбцах матрицы S и вычислим произведение AS:

$$AS = A\left\{\vec{h}^{(1)}, \vec{h}^{(2)}, \dots \vec{h}^{(3)}\right\} = \{\lambda_1 \vec{h}^{(1)}, \lambda_2 \vec{h}^{(2)}, \dots, \lambda_n \vec{h}^{(n)}\}.$$

Прием состоит в разложении последней матрицы в совершенно другое произведение:

$$\{\lambda_1\vec{h}^{(1)},\lambda_2\vec{h}^{(2)},\dots,\lambda_n\vec{h}^{(n)}\} = \{\vec{h}^{(1)},\vec{h}^{(2)},\dots\vec{h}^{(3)}\}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ .. & .. & ..\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$AS = S\Lambda,\ \text{ или }\ S^{-1}AS = \Lambda,\qquad \text{ или }\ A = S\Lambda S^{-1}.$$

Матрица S обратима, поскольку ее столбцы (собственные векторы) предполагались линейно независимыми.

З а м е ч а н и е 1. Если матрица A не имеет кратных собственных значений – числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ различны, то n собственных векторов автоматически являются линейно независимыми. Поэтому *любая матрица с различными собственными значениями может быть приведена к диагональному виду*.

З а м е ч а н и е 2. Диагонализующая матрица S неединственна. Во-первых, собственный вектор x может умножаться на константу и останется при этом собственным вектором. Поэтому мы можем умножать столбцы матрицы S на любые ненулевые константы, что дает новую диагонализующую матрицу S. Кратные собственные значения дают даже большую свободу, и для тривиального примера $A = E$ подойдет любая обратимая матрица S: $S^{-1}ES$ всегда диагональна (и диагональная матрица Λ есть просто E). Это отражает тот факт, что для единичной матрицы все векторы являются собственными.

З а м е ч а н и е 3. Равенство $AS = S\Lambda$ выполняется только в том случае, когда столбцы матрицы S являются собственными векторами матрицы A. Другие матрицы S не дадут диагональной матрицы Λ. Причина этого заложена в правилах умножения матриц. Предположим, что первый столбец матрицы S есть некоторый вектор $\vec{y}$. Тогда первый столбец матрицы $S\Lambda$ есть $\lambda_1\vec{y}$. Если это совпадает с первым столбцом матрицы AS, который по правилам умножения матриц равен $A\vec{y}$, то $\vec{y}$ должен быть собственным вектором: $A\vec{y} = \lambda_1\vec{y}$. Фактически порядок расположения собственных векторов в S и собственных значений в Λ автоматически совпадает.

З а м е ч а н и е 4. Не все матрицы имеют n линейно независимых векторов, и поэтому не все матрицы диагонализуются. Стандартный пример подобной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, поскольку она треугольная:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2.$$

Если $\vec{h}$ есть собственный вектор, то

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Хотя $\lambda = 0$ есть собственное значение, алгебраическая кратность которого равна 2, оно имеет только одномерное пространство собственных векторов. Геометрическая кратность этого собственного значения равна 1, и мы не можем построить S.

Приведем более простое доказательство того, что A недиагонализуема. Поскольку $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, Λ должна быть нулевой матрицей. Но если $S^{-1}AS = 0$, то, умножая слева на S и справа на S^{-1}, получаем, что $A = 0$. Поскольку A не является нулевой матрицей, это противоречие доказывает, что никакая матрица S не дает $S^{-1}AS = \Lambda$.

Некоторые матрицы с кратными собственными значениями могут быть приведены к диагональному виду (например, $A = E$), другие – нет. Единственный тест состоит в вычислении всех собственных векторов и определении, достаточно ли их. Когда все собственные значения различны, все просто: каждая алгебраическая или геометрическая кратность равна 1. Но если собственное значение λ повторяется m раз, то все определяется нуль-пространством матрицы $A - \lambda E$; λ проходит тест только в том случае, когда есть m соответствующих собственных векторов. Когда все собственные значения пройдут тест, мы будем иметь полный набор собственных векторов и A может быть диагонализована.

Для завершения докажем теорему, на которую опирались выше.

Если ненулевые собственные векторы $\vec{h}^{(1)}, \dots, \vec{h}^{(n)}$ соответствуют различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то эти собственные векторы линейно независимы.

Предположим сначала, что некоторая линейная комбинация $\vec{h}^{(1)}$ и $\vec{h}^{(2)}$ дает нулевой вектор: $c_1\vec{h}^{(1)} + c_2\vec{h}^{(2)} = 0$. Умножая на A, получаем $c_1\lambda_1\vec{h}^{(1)} + c_2\lambda_2\vec{h}^{(2)} = 0$. При вычитании произведения λ_2 на предыдущее уравнение вектор $\vec{h}^{(2)}$ исчезает:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{h}^{(1)} = 0.$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\vec{h}^{(1)} \neq 0$, обязательно $c_1 = 0$. Аналогично $c_2 = 0$ и эти два вектора независимы, т.е. только тривиальная комбинация дает нуль.

Это рассуждение может быть распространено на произвольное число собственных векторов: мы предполагаем, что некоторая линейная комбинация дает нуль, умножаем на A, вычитаем произведение λ_k на исходную комбинацию, и вектор $\vec{h}^{(k)}$ исчезает, оставляя комбинацию $\vec{h}^{(1)}, \dots, \vec{h}^{(k-1)}$, которая дает нуль. Повторяя эти шаги, мы приходим к кратному $x^{(1)}$, которое равно нулю. Это непременно дает $c_1 = 0$, и окончательно каждый $c_i = 0$. Следовательно, собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, автоматически линейно независимы.

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

Если матрица A приводится к диагональному виду, $A = S\Lambda S^{-1}$, то дифференциальное уравнение $d\vec{x}/dt = A\vec{x}$ имеет решение

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0 = Se^{\Lambda t}S^{-1}\vec{x}_0.$$

Столбцы матрицы S являются собственными векторами матрицы A, так что

$$\vec{x}(t) = \{\vec{h}^{(1)}, \dots, \vec{h}^{(n)}\} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \dots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1} \vec{x}_0 =$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{h}^{(1)} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \vec{h}^{(n)}.$$

Общее решение является линейной комбинацией частных решений $e^{\lambda_i t} \vec{h}^{(i)}$, и коэффициенты c_i, удовлетворяющие начальному значению $\vec{x}_0$, равны $c = S^{-1} \vec{x}_0$.

Здесь мы предполагали, что матрица A диагонализуема. В противном случае она имела бы меньше чем n собственных векторов и мы не нашли бы достаточного числа частных решений. Недостающие решения существуют, но они имеют более сложный вид. Тем не менее формула $\vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}_0$ остается справедливой. Например, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $A^2 = 0$, то ряд, определяющий экспоненту матрицы A, обрывается и

$$e^{At} = E + At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пример решения системы, у которой собственные значения не являются вещественными:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения удовлетворяют уравнению

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Они являются чисто мнимыми $\lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i$. Поскольку они различны, матрица диагонализуется. Набор собственных векторов вычисляется обычным способом:

$$\lambda_1 = i, (A - iE)\vec{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \vec{h}^{(1)} = 0, \vec{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -i,\ (A + iE)\vec{h}^{(2)} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \vec{h}^{(2)} = 0,\ \vec{h}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Диагонализующая матрица и ее обратная имеют вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Решение поставленной выше задачи Коши находится по формуле

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0 = S\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} S^{-1}\vec{x}_0.$$

Таким образом,

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} \\ -i(e^{it} - e^{-it}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

5.6. Фазовая плоскость линейной автономной системы второго порядка

Построим фазовые траектории на фазовой плоскости системы

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

с постоянными действительными коэффициентами a_{ij}. Систему (5.1) можно представить в векторной форме:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}\ . \tag{5.2}$$

Фазовая картина траекторий (5.2) существенно зависит от значений коэффициентов.

Начало координат (точка (0,0)) всегда является положением равновесия системы (5.1). Это положение равновесия является единственным, когда детерминант матрицы A отличен от нуля или, что то же, оба собственных значения этой матрицы отличны от нуля.

Пусть собственные значения матрицы A действительны, различны и отличны от нуля. Тогда произвольное действительное решение (5.2) можно записать в виде

$$\vec{x} = c_1\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{h}_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{5.3}$$

Здесь $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ – действительные линейно независимые собственные векторы матрицы A системы дифференциальных уравнений, λ_1 и λ_2 – ее собственные значения, а c_1 и c_2 – действительные константы. Решение (5.3) разложим по базису $(\vec{h}_1, \vec{h}_2)$, положив

$$\vec{x} = \xi^1\vec{h}_1 + \xi^2\vec{h}_2; \tag{5.4}$$

тогда

$$\xi^1 = c_1 e^{\lambda_1 t},\ \ \xi^2 = c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{5.5}$$

Координаты ξ^1, ξ^2 на фазовой плоскости P системы (5.1), вообще говоря, не являются прямоугольными, поэтому аффинно отобразим фазовую плоскость P на вспомогательную плоскость P^* таким образом, чтобы при этом векторы $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ перешли во взаимно ортогональные единичные векторы плоскости P^*, направленные соответственно по осям абсцисс и ординат. Точка $\vec{x} = \xi^1\vec{h}_1 + {}$ ${}+\xi^2\vec{h}_2$ плоскости P перейдет при этом отображении в точку с декартовыми прямоугольными координатами ξ^1, ξ^2 в плоскости P^*. Таким образом, траектория, заданная параметрическими уравнениями (5.5) в плоскости P, перейдет в траекторию (которую мы также назовем фазовой), заданную теми же уравнениями в прямоугольных координатах плоскости P^*. Начертим сперва траектории, заданные уравнениями (5.5), в плоскости P^* и затем отобразим их обратно в плоскость P.

Наряду с фазовой траекторией (5.5) в плоскости P^* имеется траектория, задаваемая уравнениями

$$\xi^1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \;\; \xi^2 = -c_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{5.6}$$

а также траектория, задаваемая уравнениями

$$\xi^1 = -c_1 e^{\lambda_1 t}, \;\; \xi^2 = c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{5.7}$$

Траектория (5.6) получается из траектории (5.5) зеркальным отражением относительно оси абсцисс, а траектория (5.7) – относительно оси ординат. Таким образом, два зеркальных отображения оставляют картину траекторий на плоскости P^* инвариантной. Из этого видно, что если вычертить траектории в первом квадранте, то легко представить себе всю фазовую картину в плоскости P^*.

Заметим, что при $c_1 = c_2 = 0$ мы получаем движение точки, описывающее положение равновесия (0,0), при $c_2 = 0, c_1 > 0$ – движение, описывающее полуось абсцисс, при $c_1 = 0, c_2 > 0$ – движение, описывающее положительную полуось ординат. Если $\lambda_1 < 0$, то движение, описывающее положительную полуось абсцисс, протекает в направлении *к началу координат*, если же $\lambda_1 > 0$, то движение это имеет противоположное направление – *от начала координат*. В первом случае точка движется, неограниченно приближаясь к началу координат, во втором – неограниченно удаляясь в бесконечность. То же справедливо и относительно движения, описывающего положительную полуось ординат. Если c_1 и c_2 положительны, то движение точки протекает в первой четверти, не выходя на ее границу.

Дальнейшее, более детальное описание фазовой плоскости проведем отдельно для нескольких случаев, в зависимости от знаков чисел λ_1, λ_2.

Допустим, что оба числа λ_1 и λ_2 отличны от нуля и имеют один знак, причем

$$|\lambda_1| < |\lambda_2|. \tag{5.8}$$

Разберем случай, когда $\lambda_1 < 0, \; \lambda_2 < 0$.

При этих предположениях движение по положительной полуоси абсцисс направлено к началу координат, точно так же, как движение по положительной полуоси ординат. Далее, движение по произвольной траектории внутри первого квадранта состоит в асимптотическом приближении точки к началу координат, причем траектория при этом касается оси абсцисс в начале координат. При t, стремящемся к $-\infty$, точка движется так, что ее абсцисса и ордината бесконечно возрастают, но возрастание ординаты сильнее, чем абсциссы, т.е. движение идет в направлении оси ординат. Эта фазовая картина называется *устойчивым узлом*.

Если наряду с неравенством (5.8) выполнены неравенства $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то траектории остаются прежними, но движение по ним происходит в противоположном направлении. Мы имеем неустойчивый узел.

Допустим, что числа λ_1 и λ_2 имеют противоположные знаки. Для определенности предположим, что $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. В этом случае движение по положительной полуоси абсцисс идет к началу координат, а движение по положительной полуоси ординат – от начала координат. Траектории, лежащие внутри первого квадранта, напоминают по своему виду гиперболы, а движения по ним происходят в направлении к началу вдоль оси абсцисс и в направлении от начала вдоль оси ординат. Эта фазовая картина называется *седлом*.

Рассмотрим теперь случай, когда собственные значения матрицы A комплексны. В этом случае они комплексно-сопряжены и могут быть обозначены через $\lambda = \mu + i\nu$ и $\bar{\lambda} = \mu - i\nu$, причем $\nu \neq 0$. Собственные векторы матрицы A могут быть выбраны сопряженными, так что их можно обозначить через $\vec{h}$ и $\vec{h}^*$. Положим $\vec{h} = \frac{1}{2}(\vec{h}_1 - i\vec{h}_2)$, где $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ – действительные векторы. Векторы $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ линейно независимы, так как в случае линейной зависимости между ними мы имели бы линейную зависимость между $\vec{h}$ и $\vec{h}^*$. Итак, векторы $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ можно принять за базис фазовой плоскости P уравнения (5.2).

Произвольное действительное решение уравнения (5.2) можно записать в виде

$$\vec{x} = c\vec{h}e^{\lambda t} + c^*\vec{h}^*e^{\lambda^* t}, \tag{5.9}$$

где c – комплексная константа. Пусть $\zeta = \xi^1 + i\xi^2 = ce^{\lambda t}$; тогда $\vec{x} = \xi^1\vec{h}_1 + \xi^2\vec{h}_2$. Отобразим аффинно фазовую плоскость P на вспомогательную плоскость P^* комплексного переменного ζ так, чтобы вектор $\vec{h}_1$ перешел в единицу, а вектор $\vec{h}_2$ – в i; тогда вектору $\xi^1\vec{h}_1 + \xi^2\vec{h}_2$ будет соответствовать комплексное число $\zeta = \xi^1 + i\xi^2$. В силу этого фазовая траектория (5.9) перейдет в фазовую траекторию на плоскости P^*, описываемую уравнением

$$\zeta = ce^{\lambda t}. \tag{5.10}$$

Перепишем (5.10) в полярных координатах, положив

$$\zeta = \rho e^{i\varphi}, \quad c = Re^{i\alpha}.$$

Таким образом получаем

$$\rho = Re^{\mu t}, \quad \varphi = \nu t + \alpha.$$

Это есть уравнение движения точки в плоскости P^*. При $\mu \neq 0$ каждая траектория оказывается *логарифмической спиралью*. Соответствующая картина на плоскости P называется фокусом. Если $\mu < 0$, то точка при возрастании t асимптотически приближается к началу координат, описывая логарифмическую спираль. Это *устойчивый фокус*. Если $\mu > 0$, то точка уходит от начала координат в бесконечность и мы имеем *неустойчивый фокус*. Если число μ равно нулю, то каждая траектория, кроме положения равновесия (0,0), – замкнутая кривая и мы имеем так называемый центр.

Выше мы рассматривали так называемые невырожденные случаи: корни λ_1 и λ_2 различны и отличны от нуля. Малое изменение элементов матрицы A не меняет в этих предположениях общий характер поведения фазовых траекторий. Исключение составляет случай центра: при малом изменении элементов матрицы A равенство $\mu = 0$ может нарушиться и центр перейдет в устойчивый или неустойчивый фокус.

6. Устойчивость по Ляпунову положения равновесия автономной системы

Стенные часы идут с совершенно определенным размахом маятника, хотя при их запуске маятник можно отклонить от вертикального положения более или менее сильно. Если при запуске часов маятник отклонить недостаточно сильно, то после небольшого числа колебаний он остановится. Если же отклонение достаточно велико, то через короткое время амплитуда колебаний маятника станет вполне определенной и часы будут идти с этой амплитудой неопределенно, практически бесконечно долго. Таким образом, у системы уравнений, описывающей работу часов, есть два стационарных решения: положение равновесия, соответствующее отсутствию хода, и периодическое решение, соответствующее нормальному ходу часов. Всякое другое решение очень быстро приближается к одному из этих двух стационарных и по истечении некоторого времени становится практически неотличимым от него. Каждое из двух стационарных решений является в некотором смысле *устойчивым*. Это значит, что если мы берем не стационарное решение, а решение, отклоняющееся от стационарного в начальный момент и притом не слишком сильно, то взятое нестационарное решение приближается к стационарному. Таково не вполне точно сформулированное определение устойчивости решения. На этом же примере видно, что фазовое пространство системы уравнений, описывающей работу часов, распадается на *две области притяжения*. Если взять начальное значение в одной из областей, то решение будет стремиться к положению равновесия; если взять начальные значения в другой области, то решение будет стремиться к периодическому решению.

Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных значений известно, что если задаться определенным *конечным* промежутком времени, то при достаточно малом отклонении начальных значений решение отклонится мало на всем заданном промежутке времени, но это свойство решения вовсе не означает устойчивости. Когда речь идет об устойчивости, отклонение на *неопределенно большом* отрезке времени должно быть малым, если только отклонение начальных значений мало.

Рассмотрим понятие устойчивости по Ляпунову применительно к положению равновесия автономной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \,. \tag{6.1}$$

Не давая формального определения устойчивости по Ляпунову, выразим прежде всего идею устойчивости. Положение равновесия $\vec{a}$ уравнения (6.1) следует считать *устойчивым*, если всякое решение (6.1), исходящее при $t = 0$ из точки, достаточно близкой к $\vec{a}$, остается в течение всего дальнейшего своего изменения (т.е. при $t > 0$) вблизи точки $\vec{a}$. Физический смысл устойчивости ясен. Физический объект (например, какая-либо машина), движения которого подчиняются уравнению (6.1), может находиться в положении равновесия $\vec{a}$ лишь тогда, когда это положение устойчиво, так как в противном случае ничтожное отклонение от положения равновесия, вызванное случайным толчком, может повлечь уход объекта далеко от положения равновесия.

Ниже через $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ будет обозначаться решение (6.1) с начальными значениями $t = 0$, $\vec{x} = \vec{\xi}$, так что $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ есть векторная функция скалярного переменного t и векторного переменного $\vec{\xi}$, удовлетворяющая условию

$$\vec{\varphi}\left(0, \vec{\xi}\right) = \vec{\xi}. \tag{6.4}$$

Положение равновесия $\vec{a}$ уравнения (6.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если: 1) существует настолько малое положительное число ρ, что при $\left|\vec{\xi} - \vec{a}\right| < \rho$ решение $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ уравнения (6.1) определено для всех положительных t; 2) для всякого положительного числа ε найдется такое положительное число $\delta < \rho$, что при $\left|\vec{\xi} - \vec{a}\right| < \delta$ имеем $\left|\vec{\varphi}\left(t, \vec{\xi}\right) - \vec{a}\right| < \varepsilon$ при всех $t > 0$. Устойчивое по Ляпунову положение равновесия $\vec{a}$ называется асимптотически устойчивым, 3) существует настолько малое положительное число $\sigma < \rho$, что при $\left|\vec{\xi} - \vec{a}\right| < \sigma$

$$\lim_{t\to+\infty} |\vec{\varphi}(t,\vec{\xi}) - \vec{a}| = 0.$$

7. Прямой метод Ляпунова для автономных систем

7.1. Функция Ляпунова. Критерий Сильвестра. Производная функции Ляпунова в силу системы дифференциальных уравнений

В фазовом пространстве R^n автономной дифференциальной системы

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}),\ \vec{f}(0) = 0 \qquad (7.1)$$

рассмотрим функции $V(\vec{x})$, определенные в малой окрестности начала координат и обладающие в этой окрестности рядом специфических свойств.

1. Функция $V(\vec{x})$ равна нулю в начале координат, т.е. $V(0) = 0$, и является достаточно гладкой (как минимум, непрерывно дифференцируема).

2. Если для некоторого $\mu > 0$ функция $V(\vec{x}) \geq 0$ при $\vec{x} \in \{\vec{x}\colon \| \vec{x} \| < \mu\}$, то она называется *знакопостоянной положительной.*

3. Если для некоторого $\mu > 0$ функция $V(\vec{x}) \leq 0$ при $\vec{x} \in \{\vec{x}\colon \| \vec{x} \| < \mu\}$, то она называется *знакопостоянной отрицательной*.

4. Если знакопостоянная положительная функция обращается в нуль только в начале координат, т.е. из $V(\vec{x}) = 0$ следует $\vec{x} = 0$, то функция V называется *определенно положительной*.

5. Если знакопостоянная отрицательная функция обращается в нуль только в начале координат, т.е. из $V(\vec{x}) = 0$ следует $\vec{x} = 0$, то функция V называется *определенно отрицательной*.

6. Определенно положительные и определенно отрицательные функции называются *знакоопределенными*.

7. Функции, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, называются *знакопеременными*.

Введенные нами в рассмотрение функции V применяют для исследования устойчивости положения равновесия дифференциальной системы (1) и называют *функциями Ляпунова*.

Пусть $\vec{x} \in R^2$, тогда $V(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$ является определенно положительной функцией, имеющей минимум в начале координат. Функция $V(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$ определенно положительной не является. Она знакопостоянная положительная. В начале координат она не имеет строгого локального экстремума.

Рассмотрим некоторые необходимые признаки, которые определяют характер функции V. Знакоопределенная функция должна зависеть от всех компонент вектора $\vec{x}$. Например, функция $V(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ при $\vec{x} \in R^3$ не зависит от x_3 и обращается в нуль не только в начале координат.

Знакоопределенная функция V имеет в начале координат строгий локальный экстремум. Определенно положительная функция имеет строгий локальный минимум, а определенно отрицательная – максимум. Наличие строгого локального экстремума является не только необходимым, но и достаточным условием знакоопределенности.

Тейлоровское разложение дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности начала координат функции:

$$V(x) = V(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(0)x_i +$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_j}(0)x_i x_j + o(\|\vec{x}\|^2). \tag{7.2}$$

Требование $V(0) = 0$ включено в определение функции Ляпунова. Равенство нулю всех первых производных в нуле необходимо для экстремума в начале координат. Поэтому для знакоопределенной функции Ляпунова тейлоровское разложение принимает форму

$$V(x) = \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(0) x_i x_j + o(\|\vec{x}\|^2).$$

Однородный многочлен второго порядка $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_j}(0) x_i x_j$ называют квадратичной формой. Обозначим коэффициенты этого многочлена $c_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(0)$. Из непрерывности вторых производных функции V следует равенство $c_{ij} = c_{ji}$, поэтому матрица, образованная коэффициентами рассматриваемой квадратичной формы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

является симметричной, т.е. совпадает со своей транспонированной: $C= C^T$. Эта симметричная матрица носит название матрицы квадратичной формы, и с ее помощью квадратичная форма может быть записана как

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(0) = (x_1, \dots, x_n) C \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x}^T C \vec{x}. \qquad (7.3)$$

Например, матрица C квадратичной формы

$$Q(\vec{x}) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1 x_2 - 4x_2 x_3, \qquad (7.4)$$

где $\vec{x} \in R^3$, позволяет представить эту форму в виде

$$Q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Из (7.2) следует, что для знакоопределенности функции Ляпунова $V(\vec{x})$ достаточно равенства нулю всех первых производных и знакоопределенности квадратичной формы (7.3). Для того чтобы квадратичная форма

$$(x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

была определенно положительна, необходимо и достаточно, чтобы все ведущие главные диагональные миноры матрицы этой формы были положительны:

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\Delta_n = |C| > 0.$$

Этот критерий положительной определенности называют критерием Сильвестра. Применим критерий Сильвестра к форме (7.4). Так как $\Delta_1 = 7 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 38 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$ $= 162 > 0$, квадратичная форма (7.4) является положительно определенной.

Если квадратичная форма $Q(\overrightarrow{x})$ определенно отрицательна, то форма $-Q(\overrightarrow{x})$ будет определенно положительной. Отсюда следует, что достаточным условием определенной отрицательности квадратичной формы $\vec{x}^T C\vec{x}$ будет выполнение критерия Сильвестра для матрицы $-C$, т.е. выполнение неравенств $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 <$ $< 0, \dots, (-1)^n\Delta_n > 0$. Например, для квадратичной формы

$$Q(\vec{x}) = -5x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2 = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

из неравенств $\Delta_1 = -5 < 0, \Delta_2 = 25 - 16 = 9 > 0$ следует определенная отрицательность этой формы.

Собственными числами квадратичной формы называют собственные числа ее матрицы. Поскольку все собственные числа вещественной симметричной матрицы вещественны, все собственные числа квадратичной формы вещественны. Для любой квадратичной формы справедливо двойное неравенство

$$\mu_{\min}\|\vec{x}\|^2 \le \vec{x}^T C\vec{x} \le \mu_{\max}\|\vec{x}\|^2, \tag{7.5}$$

где $\mu_{\min}$ – наименьшее собственное число формы, а $\mu_{\max}$ – наибольшее. Пусть $\vec{h}$ – собственный вектор, отвечающий собственному числу $\mu_{\min}$, тогда квадратичная форма на этом векторе принимает значение $\vec{h}^T C\vec{h} = \vec{h}^T\mu_{\min}\vec{h} = \mu_{\min}\left\|\vec{h}\right\|^2$. На собственном векторе $\vec{q}$, отвечающем собственному числу $\mu_{\max}$, квадратичная форма принимает значение $\mu_{\max}\|\vec{q}\|^2$. Таким образом, в двойном неравенстве (7.5) нижнее и верхнее значения достигаются.

Необходимым и достаточным условием положительной определенности квадратичной формы является положительность всех ее собственных чисел.

Найдем собственные числа формы (7.4). Находим характеристический полином:

$$\begin{vmatrix} \mu-7 & 2 & 0 \\ 2 & \mu-6 & 2 \\ 0 & 2 & \mu-5 \end{vmatrix} = \mu^3 - 18\mu^2 + 99\mu - 162 =$$
$$= (\mu-3)(\mu-6)(\mu-9).$$

Собственные числа квадратичной формы (7.4) 3, 6 и 9, таким образом $\mu_{\min} = 3$ и $\mu_{\max} = 9$. Поэтому

$$3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \le 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 \le$$
$$\le 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Выше мы с помощью критерия Сильвестра установили положительную определенность квадратичной формы (7.4). Зная собственные числа этой формы, еще раз можем убедиться в том, что она положительно определена.

В качестве другого примера рассмотрим функцию, которая не является квадратичной формой:

$$V(\vec{x}) = 1 - \cos(x_1 - x_2) + \sin^2 x_1. \tag{7.6}$$

В малой окрестности начала координат

$$\cos(x_1 - x_2) = 1 - \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + o(\|\vec{x}\|^2)$$
$$\text{и } \sin^2 x_1 = x_1^2 + o(\|\vec{x}\|^2),$$

поэтому

$$V(\vec{x}) = 1 - 1 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + o(\|\vec{x}\|^2) + x_1^2 + o(\|\vec{x}\|^2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + o(\|\vec{x}\|^2).$$

Вычислим главные диагональные миноры матрицы квадратичной формы $3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_1 = 3 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

Таким образом установлена положительная определенность функции Ляпунова (7.6).

Наиболее проста структура поверхностей уровня знакоопределенной квадратичной формы. Например, поверхности уровня положительно определенной квадратичной формы суть вложенные друг в друга эллипсоиды с центром в точке O. Если $0 < c_1 < c_2$, то поверхность $V(\vec{x}) = c_1$ лежит внутри эллипсоида $V(\vec{x}) = c_2$. В общем случае структура поверхности уровня $V(\vec{x}) = c$ знакоопределенной функции такова, что на любой непрерывной линии, соединяющей начало координат с точкой границы области определения, имеется по крайней мере одна точка $\vec{x}_0$, в которой $V(\vec{x}_0) = c$, если модуль c меньше некоторого положительного числа. Свойство замкнутости поверхности $V(\vec{x}) = c$ при малых c справедливо только для знакоопределенных функций. Для знакопостоянных и знакопеременных функций поверхности уровня разомкнуты. Например, для знакопеременной функции $V(\vec{x}) = x_1^2 - -x_2^2$ поверхности уровня $x_1^2 - x_2^2 = c$ являются гиперболами.

При установлении критерия устойчивости положения равновесия нелинейной системы (7.1) применяют так называемое дифференцирование в силу системы уравнений.

Пусть $V(x_1, \dots, x_2) = V(\vec{x})$ – некоторая дифференцируемая функция переменных $x_1, \dots, x_2$. Ее производная по t в силу системы уравнений (7.1) в точке $\vec{x} = (x_1, \dots, x_2)$ определяется следующим образом. Пусть $\vec{\varphi}(t)$ – решение (7.1), удовлетворяющее условию $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}$. Производная $V(\vec{x})$ в силу (7.1) определяется формулой

$$\dot{V}_{(1)} = \frac{d}{dt} V(\vec{\varphi}(t))|_{t=t_0},$$

которая по формуле полной производной преобразуется к виду

$$\dot{V}_{(1)}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i} f_i(\vec{x}). \tag{7.7}$$

Из (7.7) видно, что $\dot{V}_{(1)}(\vec{x})$не зависит от решения $\vec{\varphi}(t)$, а однозначно определяется выбором точки $\vec{x}$. В правой части (7.7) стоит скалярное произведение градиента функции $V(\vec{x})$ в точке $\vec{x}$ и вектора фазовой скорости $\vec{f}(\vec{x})$ системы (7.1):

$$\dot{V}_{(1)}(\vec{x}) = (\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_n}) \vec{f}(\vec{x}).$$

Если это скалярное произведение в точке $\vec{x}$ положительно, то вектор фазовой скорости $\vec{f}(\vec{x})$ образует острый угол с градиентом функции $V(\vec{x})$ в этой точке. Если это скалярное произведение в точке $\vec{x}$ отрицательно, то вектор фазовой скорости $\vec{f}(\vec{x})$ образует тупой угол с градиентом функции $V(\vec{x})$ в этой точке. Если это скалярное произведение в точке $\vec{x}$ равно нулю, то вектор фазовой скорости $\vec{f}(\vec{x})$ образует прямой угол с градиентом функции $V(\vec{x})$ в этой точке. Градиент $\mathrm{grad} V(\vec{x})$ ортогонален поверхности уровня, проходящей через точку $\vec{x}$, и для положительно определенной функции $V(\vec{x})$ направлен наружу этой замкнутой поверхности. Поэтому при $\dot{V}_{(1)}(\vec{x}) > 0$ вектор фазовой скорости $\vec{f}(\vec{x})$ также направлен наружу этой поверхности, а при $\dot{V}_{(1)}(\vec{x}) < 0$ – внутрь поверхности уровня функции $V(\vec{x})$. Наконец, при $\dot{V}_{(1)}(\vec{x}) = 0$ вектор фазовой скорости $\vec{f}(\vec{x})$ касается поверхности уровня.

Рассмотрим автономную систему второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & -x_2, \\ \dot{x}_2 = & x_1. \end{cases} \tag{7.8}$$

Продифференцируем положительно определенную функцию $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$ в силу системы (7.8): $\dot{V}_{(8)}(\vec{x}) = 2x_1(-x_2) + 2x_2x_1 \equiv 0$. В каждой точке фазовой плоскости вектор фазовой скорости направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку. Поэтому фазовые траектории суть окружности.

Рассмотрим другую автономную систему второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_1, \\ \dot{x}_2 = & x_2. \end{cases} \tag{7.9}$$

Продифференцируем положительно определенную функцию $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$ в силу системы (7.9): $\dot{V}_{(9)}(\vec{x}) = 2x_1x_1 + 2x_2x_2$. Производная $\dot{V}_{(9)}(\vec{x})$ положительно определена. Поэтому вектор фазовой скорости в любой точке, отличной от начала координат, направлен наружу окружности, проходящей через эту точку. Фазовая точка, двигаясь по траектории, удаляется от точки покоя в начале координат.

Рассмотрим еще одну автономную систему второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & -x_1, \\ \dot{x}_2 = & -x_2. \end{cases} \tag{7.10}$$

Продифференцируем положительно определенную функцию $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$ в силу системы (7.10): $\dot{V}_{(10)}(\vec{x}) = 2x_1(-x_1) + 2x_2(-x_2)$. Производная $\dot{V}_{(10)}(\vec{x})$ отрицательно определена. Поэтому вектор фазовой скорости в любой точке, отличной от начала координат, направлен внутрь окружности, проходящей через эту точку. Фазовая точка, двигаясь по траектории, приближается к точке покоя в начале координат.

7.2 Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости

Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия автономной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}),\ \vec{f}(0) = 0. \tag{7.11}$$

Если в некоторой окрестности начала координат в фазовом пространстве системы (7.11) существует знакоопределенная функция $V(\vec{x})$, производная которой $\dot{V}_{(11)}(\vec{x})$ в силу системы (7.11) является знакопостоянной функцией, знака, противоположного знаку функции $V(\vec{x})$, или тождественно равна нулю, то положение равновесия системы (7.11) устойчиво в смысле Ляпунова.

Доказательство. Для произвольного малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим окрестность $G_\varepsilon = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \varepsilon\}$ начала координат и сферу $S_\varepsilon = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| = \varepsilon\}$. Эта сфера является замкнутым ограниченным множеством, на котором непрерывная функция $V(\vec{x})$ достигает своего наименьшего значения $v_{\min}$. Будем для определенности считать функцию $V(\vec{x})$ положительно определенной, тогда $v_{\min} > 0$. Найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что в окрестности $G_\delta = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \delta\}$ начала координат равная нулю в этом начале непрерывная функция $V(\vec{x})$ принимает значения, меньшие $v_{\min}$, т.е. $V(\vec{x}) < v_{\min}$ при $\vec{x} \in G_\delta$. Из произвольной точки $\vec{x}_0 \in G_\delta$ выпустим в момент $t = 0$ фазовую траекторию $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$. Для доказательства устойчивости точки покоя достаточно показать, что эта траектория не покинет окрестности $G_\varepsilon = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \varepsilon\}$ начала координат. Покажем, что обратное предположение приводит к противоречию. Рассмотрим функцию времени $V(\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0))$, которая при $t = 0$ принимает значение, меньшее $v_{\min}$. Если фазовая траектория $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$ покидает окрестность G_ε, то в некоторый момент $t > 0$ она пересекает границу G_ε, т.е. $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0) \in S_\varepsilon =$ $= \{\vec{x}: \|\vec{x}\| = \varepsilon\}$ и, следовательно, в этот момент $V(\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)) \geq$ $v_{\min}$. Поскольку $\dot{V}_{(10)}(\vec{x}) \leq 0$, функция $V(\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0))$ не возрастает. Поэтому

$$v_{\min} \geq V(\vec{\varphi}(0, \vec{x}_0)) \geq V(\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)),$$

что противоречит следствию $V(\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)) \geq v_{\min}$ предположения о выходе фазовой траектории из $G_\varepsilon = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \varepsilon\}$.

Применим доказанную теорему к установлению устойчивости нижнего положения математического маятника длиной l, совершающего движения в поле тяжести с ускорением свободного падения g. Уравнения движения маятника:

$$\ddot{q} + \frac{g}{l}\sin q = 0,$$

где q угол отклонения маятника от вертикали, запишем в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{q} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin q. \end{cases} \tag{7.12}$$

Функцией Ляпунова нам послужит полная энергия маятника

$$V(q, \omega) = \frac{\omega^2}{2} + \frac{g}{l}(1 - \cos q).$$

Найдем производную этой положительно определенной функции Ляпунова в силу системы (7.12):

$$\dot{V}_{(12)}(q, \omega) = \omega\dot{\omega} + \frac{g}{l}\sin q(\dot{q}) = \omega(-\frac{g}{l}\sin q) + \frac{g}{l}\sin q(\omega) \equiv 0.$$

Поскольку функция Ляпунова положительно определена, а ее производная в силу системы (7.12) тождественно равна нулю, положение равновесия (7.12) устойчиво.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости положения равновесия автономной системы дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, $\vec{f}(0) = 0$.

Если в некоторой окрестности начала координат в фазовом пространстве системы (7.11) существует знакоопределенная функция $V(\vec{x})$, производная которой $\dot{V}_{(11)}(\vec{x})$ в силу (7.11) является знакоопределенной функцией, знака противоположного знаку функции $V(\vec{x})$, то положение равновесия (7.11) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Условия теоремы об устойчивости выполнены, поэтому для малой окрестности $G_R = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < R\}$ начала координат существует окрестность $G_r = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < r\}$ такая, что фазовая траектория, выпущенная из этой окрестности в момент $t = 0$, не выйдет из окрестности G_R. Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$ – такая траектория, т.е. $\vec{\varphi}(0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0 \in G_r$. Нужно доказать, что для любого

$\varepsilon > 0$ существует момент времени t_1, после которого фазовая точка $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$ находится в окрестности $G_\varepsilon = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \varepsilon\}$ начала координат, т.е. $\lim_{t\to\infty} \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0) = \vec{0}$.

Для этого по заданному $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ такое, что фазовая точка, попав в момент t_1 в $G_\delta = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \delta\}$, остается в множестве $G_\varepsilon = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \varepsilon\}$ при всех $t \geq t_1$. Другими словами из $\varphi(t_1, \vec{x}_0) \in G_\delta$ следует, что

$$\{\vec{x}: \vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0), t \geq t_1\} \subset G_\varepsilon = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \varepsilon\}.$$

Предположим, что фазовая траектория никогда не попадает в G_δ, тогда при всех $t \geq 0$ фазовая точка $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$ находится в шаровом слое $G_R = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < R\} \setminus G_\delta = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \delta\}$. Пусть для определенности функция Ляпунова $V(\vec{x})$ определенно положительна. В замыкании шарового слоя $G_R \setminus G_\delta$ определенно отрицательная функция $\dot{V}_{(11)}(\vec{x})$ имеет максимальное значение, которое обозначим $w_{\max}$. Очевидно, что $w_{\max} < 0$. Для значения функции Ляпунова вдоль фазовой траектории $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$ справедлива оценка

$$V\big(\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)\big) = V(\vec{x}_0) + \int_0^t \dot{V}_{(10)}\big(\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)\big)dt \leq V(\vec{x}_0) + w_{\max}t. \quad (7.13)$$

Поскольку $w_{\max} < 0$, правая часть неравенства (7.13) с ростом t становится отрицательной, что противоречит положительной определенности $V(\vec{x})$. Полученное противоречие доказывает попадание фазовой траектории в некоторый момент t_1 в G_δ.

Для примера докажем асимптотическую устойчивость положения равновесия автономной системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & -x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = & x_1 - x_2. \end{cases} \quad (7.14)$$

В качестве функции Ляпунова возьмем положительно определенную функцию $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$, которую продифференцируем в силу системы (7.14):

$$\dot{V}_{(14)}(\vec{x}) = 2x_1(-x_1 - x_2) + 2x_2(x_1 - x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2.$$

Функция $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$ определенно положительна, а ее производная в силу системы (7.14) $\dot{V}_{(14)}(\vec{x}) = -2(x_1^2 + x_2^2)$ определенно отрицательна, следовательно, точка покоя системы (7.14) асимптотически устойчива.

В теореме Н.Н. Красовского, обобщающей теорему Ляпунова, требования, налагаемые на производную в силу системы, ослаблены.

Теорема Красовского об асимптотической устойчивости. Если в некоторой окрестности начала координат в фазовом пространстве системы (7.11) существует определенно положительная функция $V(\vec{x})$, производная которой $\dot{V}_{(11)}(\vec{x})$ в силу системы (7.11) является знакопостоянной отрицательной функцией, причем множество $K = \left\{\vec{x}: \dot{V}_{(11)}(\vec{x}) = 0\right\}$ не содержит целых траекторий, отличных от начала координат, то положение равновесия (7.11) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова.

Применим теорему Красовского к установлению асимптотической устойчивости нижнего положения математического маятника длиной l, совершающего движения в поле тяжести с ускорением свободного падения g при наличии сопротивления среды, пропорционального угловой скорости. Уравнения движения маятника:

$$\ddot{q} + k\dot{q} + \frac{g}{l}\sin q = 0,$$

где q – угол отклонения маятника от вертикали, запишем в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{q} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin q - k\omega. \end{cases} \tag{7.15}$$

Функцией Ляпунова, как и в случае движения маятника без сопротивления, нам послужит полная энергия маятника

$$V(q, \omega) = \frac{\omega^2}{2} + \frac{g}{l}(1 - \cos q). \tag{7.16}$$

Найдем производную положительно определенной функции Ляпунова (7.16) в силу системы (7.15):

$$\dot V_{(15)}(q,\omega)=\omega\dot\omega+\frac{g}{l}\sin q(\dot q)=$$
$$\omega\left(-\frac{g}{l}\sin q-k\omega\right)+\frac{g}{l}\sin q(\omega)=-k\omega^2.$$

Функция $\dot V_{(15)}(q,\omega)\le 0$ и принимает нулевые значения на множестве
$$K=\left\{\vec x:\dot V_{(15)}(\vec x)=0\right\}=\{(q,\omega):\omega=0\}.$$

Целой траекторией на множестве точек фазового пространства, в которых угловая скорость равна нулю, могут быть только точки покоя. В малой окрестности нижнего положения равновесия точка покоя только одна – начало координат. Все условия теоремы Красовского выполнены, следовательно, нижнее положение равновесия маятника при наличии сопротивления асимптотически устойчиво.

7.3. Асимптотическая устойчивость в целом

Пусть для точки x_0 фазового пространства автономной системы $\dot{\vec x}=f(\vec x)$ существует последовательность $t_1<t_2<\cdots<t_n<\ldots$ $\ldots(t_n\to\infty)$ такая, что $\lim_{n\to\infty}\vec x(t_n,x_0)=y$. Тогда точка фазового пространства y называется ω-*предельной точкой для точки* x_0. Если существует последовательность $t_1>t_2>\cdots>t_n>\cdots(t_n\to -\infty)$ такая, что $\lim_{n\to\infty}\vec x(t_n,x_0)=y$, то точка фазового пространства y называется α-*предельной точкой для точки* x_0.

Для всех точек достаточно малой окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия это положение равновесия является ω-предельной точкой. Точки предельного цикла являются ω-предельными для точек фазовых траекторий, которые, приближаясь к циклу, навиваются на него.

Теорема. Все ω-предельные точки данной точки $\vec x_0$ образуют замкнутое множество, состоящее из целых траекторий.

Доказательство. Предельная точка для предельных точек некоторого множества снова является предельной точкой этого множества. Это обусловливает замкнутость множества ω-предельных точек точки $\vec x_0$. Пусть $\vec y$ является ω-предельной точкой для точки $\vec{x}_0$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \vec{x}(t_n, x_0) = \vec{y}$. Докажем, что точки фазовой траектории $\vec{x}(\tau, \vec{y})$, содержащей $\vec{y}$, также будут ω-предельными точками для точки $\vec{x}_0$. При доказательстве воспользуемся групповым свойством решений автономной системы и непрерывной зависимостью решения от начального значения:

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}(t_n + \tau, \vec{x}_0) = \lim_{n\to\infty} \vec{x}\,(\tau, \vec{x}(t_n, \vec{x}_0)) =$$
$$= \vec{x}\left(\tau, \lim_{n\to\infty} \vec{x}(t_n, \vec{x}_0)\right) = \vec{x}(\tau, \vec{y}).$$

Лемма. Пусть в области G фазового пространства автономной системы существует ограниченная снизу функция V, производная которой в силу системы знакоотрицательна в G. Тогда все ω-предельные точки любой траектории, не покидающей G при $t \to +\infty$, лежат на одной и той же поверхности уровня функции V.

Доказательство. Пусть $\{\vec{x} : \vec{x} = \vec{x}(t, \vec{x}_0), t \geq 0\} \subset G$ и $\vec{y} = \lim_{n\to\infty} \vec{x}(t_n, \vec{x}_0)$, т.е. $\vec{y}$ является ω-предельной точкой для $\vec{x}_0$. Для функции $V(\vec{x}(t, \vec{x}_0))$ при $t \to +\infty$ существует предел $v_0 = \lim_{t\to+\infty} V(\vec{x}(t, \vec{x}_0))$, поскольку она не возрастает и ограничена снизу. В силу непрерывности V

$$v_0 = \lim_{n\to+\infty} V\big(\vec{x}(t_n, \vec{x}_0)\big) = V(\lim_{n\to\infty} \vec{x}(t_n, \vec{x}_0)) = V(\vec{y}).$$

Таким образом, все ω-предельные точки любой траектории, не покидающей G при $t \to +\infty$, лежат на одной и той же поверхности уровня $V(\vec{x}) = v_0$.

Определение устойчивости в целом. Нулевое решение автономной системы $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ называется устойчивым в целом или устойчивым при любых начальных возмущениях, если оно устойчиво по Ляпунову и для всякого другого решения $\vec{x}(t)$ системы $\|\vec{x}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Определение бесконечно большой функции Ляпунова V. Если для любого положительного числа M существует $r > 0$ такое, что $V(\vec{x}) > M$ при $\|\vec{x}\| > r$, то функцию Ляпунова называют бесконечно большой.

Поскольку положительно определенная квадратичная форма удовлетворяет неравенству

$$\mu_{\min}\|\vec{x}\|^2 \le \vec{x}^T C\vec{x},$$

где $\mu_{\min} > 0$ – наименьшее собственное число формы, она является бесконечно большой. Определенно положительная функция $V(\vec{x}) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{1+x_2^2}$ не является бесконечно большой. При $x_1 = 0$ и $x_2 \to \infty$ эта функция не стремится к бесконечности.

Все поверхности уровня бесконечно большой функции ограничены, так как для любого $M > 0$ можно найти $r > 0$ такое, что $V(\vec{x}) > M$ при $\|\vec{x}\| > r$ и, следовательно, все точки поверхности $V(\vec{x}) = M$ лежат внутри шара $\|\vec{x}\| \le r$.

Теорема об асимптотической устойчивости в целом Барбашина–Красовского. Если в некоторой окрестности начала координат в фазовом пространстве системы (7.11) существует бесконечно большая определенно положительная функция $V(\vec{x})$, производная которой $\dot{V}_{(11)}(\vec{x})$ в силу системы (7.11) является знакопостоянной отрицательной функцией во всем фазовом пространстве, причем множество $K = \left\{\vec{x}: \dot{V}_{(11)}(\vec{x}) = 0\right\}$ не содержит целых траекторий, отличных от начала координат, то положение равновесия системы (7.11) устойчиво в целом.

Доказательство. Из произвольной точки $\vec{x}_0$ фазового пространства выпустим траекторию $\vec{x}(t,\vec{x}_0), (t \ge 0)$. По условию теоремы $V(\vec{x}(t,\vec{x}_0))$ не возрастает, следовательно, $V(\vec{x}(t,\vec{x}_0)) \le$ $\le V(\vec{x}_0)$. Множество точек фазового пространства $\{\vec{x}: V(\vec{x}) \le V(\vec{x}_0)\}$, в котором лежит полутраектория $\vec{x}(t,\vec{x}_0), (t \ge 0)$, ограничено, поэтому множество ω-предельных точек этой траектории Ω не пусто. Если это множество содержит только одну точку, совпадающую с началом координат, то теорема доказана, поскольку в этом случае $\lim_{t\to+\infty} \vec{x}(t,\vec{x}_0) = 0$. Допустим, что $\vec{y} \in \Omega$ и $\vec{y} \ne 0$. Из леммы следует, что

$$V(\vec{y}) = V\big(\vec{x}(t,\vec{y})\big) = \lim_{t\to+\infty} V\big(\vec{x}(t,\vec{x}_0)\big) \ne 0.$$

Таким образом, все ω-предельные точки начального состояния $\vec{x}_0$ лежат на одной поверхности уровня $V(\vec{x}) = V(\vec{y})$. Множество Ω замкнуто и состоит из целых траекторий. Функция V вдоль этих траекторий остается постоянной, поэтому на всем множестве Ω выполняется равенство $\dot{V}_{(11)}(\vec{x}) = 0$, т.е. $\Omega \subset \left\{\vec{x}: \dot{V}_{(10)}(\vec{x}) = 0\right\}$ и, следовательно, множество $K = \left\{\vec{x}: \dot{V}_{(10)}(\vec{x}) = 0\right\}$ содержит целые траектории. Это противоречие доказывает теорему.

Следствие теоремы Барбашина–Красовского. Если существует бесконечно большая определенно положительная функция V, производная которой $\dot{V}_{(11)}(\vec{x})$ в силу системы (7.11) определенно отрицательна во всем фазовом пространстве, то нулевое решение (7.11) асимптотически устойчиво в целом.

В качестве примера применения этого следствия исследуем устойчивость точки покоя автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & -5x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = & 7x_1 - x_2^3, \end{cases}$$

с помощью бесконечно большой положительно определенной функции

$$V(\vec{x}) = 7x_1^2 + 5x_2^2.$$

Вычислим производную этой функции в силу нашей системы:

$$\dot{V}(\vec{x}) = 14x_1\dot{x}_1 + 10x_2\dot{x}_2 = 14x_1(-5x_2 - x_1^3) + 10x_2(7x_1 - x_2^3) = \\ = -(14x_1^4 + 10x_2^4).$$

Функция $\dot{V}(\vec{x})$ определена во всем пространстве и отрицательно определена. Положение равновесия исследуемой системы асимптотически устойчиво в целом.

7.4. Теоремы о неустойчивости

Теорема о неустойчивости Красовского. Если существует функция V, не являющаяся знакоотрицательной в произвольной окрестности начала координат и такая, что ее производная в силу системы (7.11) знакоположительна и не обращается в нуль на множестве, содержащем целые траектории, исключая начало координат, то положение равновесия (7.11) неустойчиво.

Доказательство. Покажем существование $\varepsilon > 0$ такого, что для произвольно малого $\delta > 0$ полутраектория $\vec{x}(t, \vec{x}_0), (t > 0)$, при условии $\|\vec{x}_0\| < \delta$ выйдет за пределы множества $\bar{B}_\varepsilon = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| \le \varepsilon\}$.

Предположим противное и для произвольно малого $\delta > 0$ выберем точку $\vec{x}_0$, в которой $V(\vec{x}_0) = v_0 > 0$. Найдем окрестность $B_\eta = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \eta \ \wedge \ |V(\vec{x})| < v_0\}$, в которую фазовая полутраектория $\vec{x}(t, \vec{x}_0), (t > 0)$, не может попасть, ибо $V(\vec{x}(t, \vec{x}_0))$ не убывает с ростом t. Фазовая полутраектория будет лежать в шаровом слое $\bar{B}_\varepsilon \setminus B_\eta$, и непустое множество ω-предельных точек точки $\vec{x}_0$ также будет лежать в этом слое: $\Omega \subset \bar{B}_\varepsilon \setminus B_\eta$. Множество Ω замкнуто, состоит из целых траекторий и лежит на поверхности уровня функции V, поэтому на всем множестве Ω производная $\dot{V}_{(11)}$ обращается в ноль.

Из включения $\Omega \subset \left\{\vec{x}: \dot{V}_{(11)}(\vec{x}) = 0\right\}$ следует, что множество $K = \left\{\vec{x}: \dot{V}_{(11)}(\vec{x}) = 0\right\}$ содержит целые траектории. Это противоречие доказывает теорему.

З а м е ч а н и е. В формулировке теоремы о неустойчивости Красовского можно принять функцию $\dot{V}_{(11)}$ знакоотрицательной, но тогда функция V не должна быть знакоположительной.

Применим теорему о неустойчивости Красовского к установлению неустойчивости верхнего положения математического маятника с уравнениями движения (7.15), в котором выполним замену переменной $q = \pi + \alpha$, где α − угол отклонения маятника от верхнего положения равновесия $q = \pi$. После замены уравнения движения примут вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \omega, \\ \dot{\omega} = \frac{g}{l}\sin\alpha - k\omega. \end{cases} \tag{7.17}$$

Функция $V(\alpha, \omega) = \frac{\omega^2}{2} + \frac{g}{l}(\cos\alpha - 1)$ не является знакоположительной, поскольку принимает отрицательные значения в точках $(\alpha, 0)$, сколь угодно близких к точке $(0, 0)$. Продифференцируем эту функцию в силу системы (7.17):

$$\dot{V}_{(17)}(\alpha, \omega) = \omega\dot{\omega} - \frac{g}{l}(\sin\alpha)\dot{\alpha} =$$

$$= \omega\left(\frac{g}{l}\sin\alpha - k\omega\right) - \frac{g}{l}(\sin\alpha)\omega = -k\omega^2.$$

Функция $\dot{V}_{(17)}(\alpha,\omega) \leq 0$ и принимает нулевые значения на множестве

$$K = \left\{\vec{x}: \dot{V}_{(17)}(\alpha,\omega) = 0\right\} = \{(\alpha,\omega): \omega = 0\}.$$

Целой траекторией на множестве точек фазового пространства, в которых угловая скорость равна нулю, могут быть только точки покоя. В малой окрестности верхнего положения равновесия точка покоя только одна – начало координат. Все условия теоремы Красовского выполнены, следовательно, верхнее положение равновесия маятника неустойчиво.

Ляпунову принадлежат две теоремы о неустойчивости движения.

Первая теорема Ляпунова о неустойчивости. Если существует функция V, имеющая знакоопределенную производную в силу системы (7.11) и такая, что в любой малой окрестности точки O не является знакопостоянной, знака, противоположного знаку $\dot{V}_{(11)}$, то нулевое решение системы (7.11) неустойчиво. Эта теорема есть прямое следствие теоремы о неустойчивости Красовского.

Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости. Если существует функция V такая, что ее производная в силу системы (7.11) имеет вид

$$\dot{V}_{(10)} = \lambda V + W, \tag{7.18}$$

где λ − положительная постоянная, а W или тождественно обращается в нуль, или является знакопостоянной, и если в последнем случае функция V не является в любой малой окрестности точки O знакопостоянной, знака, противоположного знаку W, то нулевое решение системы (7.11) неустойчиво.

Доказательство. Для определенности будем полагать функцию W знакопостоянной положительной. Для произвольно малого $\delta > 0$ выберем точку $\vec{x}_0$ фазового пространства системы (7.11), в которой $V(\vec{x}_0) = v_0 > 0$. Покажем, что фазовая траектория

$\vec{x}(t,\vec{x}_0)$ с ростом t выйдет за пределы любой окрестности $B_\varepsilon = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \varepsilon\}$, в которой выполнены условия теоремы.

Вдоль фазовой траектории выполняется равенство (7.18):

$$\frac{d}{dt}V\big(\vec{x}(t,\vec{x}_0)\big) = \lambda V\big(\vec{x}(t,\vec{x}_0)\big) + W(\vec{x}(t,\vec{x}_0)), \qquad (7.19)$$

из которого можно определить функцию времени $V\big(\vec{x}(t,\vec{x}_0)\big)$, решая линейное дифференциальное уравнение (7.19) с начальным условием $V(\vec{x}_0) = v_0 > 0$:

$$V\big(\vec{x}(t,\vec{x}_0)\big) = e^{\lambda t}(v_0 + \int_0^t e^{-\lambda\tau} W\big(\vec{x}(\tau,\vec{x}_0)\big)d\tau).$$

Поскольку $W(\vec{x}) \geq 0$, справедливо неравенство

$$V\big(\vec{x}(t,\vec{x}_0)\big) \geq v_0 e^{\lambda t},$$

из которого следует, что $V\big(\vec{x}(t,\vec{x}_0)\big)$ растет неограниченно, пока выполняются условия теоремы. Поэтому фазовая траектория выйдет за пределы окрестности $B_\varepsilon = \{\vec{x}: \|\vec{x}\| < \varepsilon\}$ начала координат.

Все условия второй теоремы Ляпунова о неустойчивости выполнены в следующем примере исследования устойчивости положения равновесия автономной системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = & -x_1 + x_2, \end{cases} \qquad (7.20)$$

с помощью функции Ляпунова $V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Производная этой функции в силу системы (7.20) имеет вид

$$\dot{V}_{(20)}(\vec{x}) = 2x_1(x_1 - x_2) - 2x_2(-x_1 + x_2) = 2x_1^2 - 2x_2^2.$$

Таким образом, $\dot{V}_{(20)}(\vec{x}) = 2V(\vec{x})$ и выполняются условия теоремы при $\lambda = 2 > 0$ и $W(\vec{x}) \equiv 0$. Положение равновесия системы (7.20) неустойчиво.

8. Достаточные условия устойчивости положения равновесия линейной автономной системы

Сформулируем достаточные условия устойчивости положения равновесия для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}. \tag{8.1}$$

Решение системы (8.1) с начальными значениями $0, \vec{\xi}$ обозначим через $\vec{\psi}(t, \vec{\xi})$. Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то существуют такие положительные числа α и r, что выполнено неравенство

$$\| \vec{\psi}(t, \vec{\xi}) \| \leq r \| \xi \| e^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0. \tag{8.2}$$

Из (8.2) непосредственно следует, что положение равновесия $\vec{x} = 0$ уравнения (8.1) является устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым.

Докажем неравенство (8.2) для случая, когда все собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A различны. Такая матрица приводится преобразованием подобия к диагональному виду $A = S\Lambda S^{-1}$, где Λ – диагональная матрица, у которой на диагонали стоят собственные числа матрицы A. Решение $\vec{\psi}(t, \vec{\xi}) = e^{\mathrm{A}t}\vec{\xi}$ уравнения (8,1) можно представить в виде

$$\vec{\psi}(t, \vec{\xi}) = Se^{\Lambda t}S^{-1}\vec{\xi}, \tag{8.3}$$

из которого следует оценка нормы решения:

$$\| \vec{\psi}(t, \vec{\xi}) \| \leq \| S \| \| e^{\Lambda t} \| \| S^{-1} \| \| \vec{\xi} \|. \tag{8.4}$$

Пусть $\alpha = \max\{Re\lambda_1, \dots, Re\lambda_n\}$, тогда

$$\| e^{\Lambda t} \| = \max\{|e^{\lambda_1 t}|, \dots, |e^{\lambda_n t}|\} = e^{-\alpha t}.$$

Обозначив $\| S \| \| S^{-1} \| = r$, из (8.4) получим оценку нормы решения:

$$\| \vec{\psi}(t,\vec{\xi}) \| \leq r \| \xi \| e^{-\alpha t},$$

которая остается справедливой и в случае, когда матрица A не приводится к диагональному виду. Устойчивость по Ляпунову положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ непосредственно вытекает из неравенства (8.2). Действительно, если ε – заданное положительное число, то достаточно принять за δ число ${}^{\varepsilon}/_{r}$. Асимптотическая устойчивость также вытекает из неравенства (8.2).

9. Построение функции Ляпунова в виде квадратичной формы для линейной автономной системы

Найдем производную квадратичной формы $V = \vec{x}^T B\vec{x}$ в силу автономной линейной системы

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}\ . \tag{9.1}$$

Поскольку $\dot{\vec{x}}^T = \vec{x}^T A^T$,

$$\dot{V}_{(1)}(\vec{x}) = \dot{\vec{x}}^T B\vec{x} + \vec{x}^T B\dot{\vec{x}} = \vec{x}^T (A^T B + BA)\vec{x}\ . \tag{9.2}$$

Для того чтобы форма $V = \vec{x}^T B\vec{x}$ удовлетворяла уравнению $\dot{V}_{(1)}(\vec{x}) = W(\vec{x})$, где $W(\vec{x}) = \vec{x}^T C\vec{x}$ – заданная квадратичная форма, матрица B должна быть решением матричного уравнения

$$A^T B + BA = C. \tag{9.3}$$

При заданной симметричной матрице B уравнение (9.3) ставит в соответствие ей симметричную матрицу C. Покажем, что это соответствие линейно. Действительно,

$$A^T(\alpha B_1 + \beta B_2) + (\alpha B_1 + \beta B_2)A = \alpha(A^T B_1 + B_1 A) + \beta(A^T B_2 + \\ + B_2 A).$$

Симметричная матрица порядка n задается $N = \frac{n(n+1)}{2}$ элементами. Поэтому линейное пространство симметричных матриц порядка n имеет $N = \frac{n(n+1)}{2}$ измерений. В этом конечномерном пространстве действует линейный оператор $F(B) = A^T B + BA$. Для существования обратного оператора $F^{-1}(C)$ необходимо и достаточно, чтобы среди собственных чисел оператора F не было нулевых. Отсутствие нулевых собственных чисел этого оператора гарантирует существование единственного решения матричного уравнения (9.3).

Собственным числом оператора F называется число μ, для которого существует ненулевая матрица B, удовлетворяющая соотношению $F(B) = \mu B$.

Лемма. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A, тогда любое число $\lambda_i + \lambda_j$ является собственным числом оператора $F(B) = A^T B + BA$.

Доказательство. Рассмотрим собственный столбец $\vec{h}^k$ матрицы A^T, отвечающий собственному числу λ_k, таким образом, $A^T \vec{h}^k = \lambda_k \vec{h}^k$. Покажем, что матрица $B^{ik} = \vec{h}^i \left(\vec{h}^k\right)^T$ является собственной для оператора F, отвечающей собственному числу $\mu = \lambda_i + \lambda_k$:

$$F\left(B^{ik}\right) = A^T \vec{h}^i \left(\vec{h}^k\right)^T + \vec{h}^i \left(\vec{h}^k\right)^T A = \lambda_i \vec{h}^i \left(\vec{h}^k\right)^T + \vec{h}^i \left(A^T \vec{h}^k\right)^T =$$
$$= \lambda_i \vec{h}^i \left(\vec{h}^k\right)^T + \lambda_k \vec{h}^i \left(\vec{h}^k\right)^T = (\lambda_i + \lambda_k) B^{ik}.$$

Утверждение доказанной леммы можно усилить фактом, который мы примем без доказательства. *Любое собственное число оператора F имеет вид $\lambda_i + \lambda_j$.*

Если все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то ни одна из сумм этих собственных чисел $\lambda_i + \lambda_j$ не обращается в нуль. В этом случае оператор F не имеет нулевых собственных чисел и, следовательно, обратим.

Теорема. Если система (9.1) асимптотически устойчива, т.е. все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то для любой квадратичной формы $W(\vec{x}) = \vec{x}^T C \vec{x}$ найдется единственная квадратичная форма $V(\vec{x}) = \vec{x}^T B \vec{x}$ такая, что ее производная в силу системы (9.1) равна $W(\vec{x}) = \vec{x}^T C \vec{x}$. Другими словами, для любой симметричной матрицы C найдется единственная симметричная матрица B из уравнения $A^T B + BA = C$.

Например, для системы второго порядка

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \vec{x}$$

при заданной квадратичной форме

$$W(\vec{x}) = c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2$$

квадратичная форма $V(\vec{x}) = \vec{x}^T B \vec{x}$, удовлетворяющая условию

$$\dot{V}_{(1)}(\vec{x}) = W(\vec{x}),$$

может быть определена равенством

$$V(\vec{x}) = -\frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \\ c_{11} & a_{11} & a_{21} & 0 \\ 2c_{12} & a_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ c_{22} & 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad (9.4)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

П р и м е р. Найти квадратичную форму $V(\vec{x})$, производная которой в силу системы

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

была бы формой $W(\vec{x}) = -x_1^2 - x_2^2$.

Подсчитаем определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

Согласно равенству (9.3)

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{24}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель по первой строке, находим

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{24} \times \left(-x_1^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 2x_1x_2 \times \right.$$

$$\left. \times \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} - x_2^2 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -0 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

10. Теоремы Ляпунова об устойчивости положения равновесия автономной системы по первому приближению

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \ \ (i = 1, \dots, n), \tag{10.1}$$

векторная запись которой:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}).$$

Будем предполагать, что правые части системы $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $(i = 1, \dots, n)$ определены, имеют непрерывные вторые частные производные в некоторой окрестности начала координат и обращаются в нуль в начале координат, т.е. $\vec{f} = 0$. В этом случае систему (10.1) можно записать в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(0,\dots,0)}{\partial x_j} x_j + R_i, \ \ (i = 1, \dots, n), \tag{10.2}$$

в котором через R_i обозначен остаточный член формулы Тейлора:

$$R_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(\theta\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k} x_j x_k. \qquad (10.3)$$

В силу непрерывности вторые частные производные ограничены в некоторой окрестности начала координат:

$$\left|\frac{\partial^2 f_i(\theta\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leq l,$$

что влечет за собой ограниченность функций R_i:

$$|R_i| \leq \frac{1}{2} n^2 l \|\vec{x}\|^2 = C\|\vec{x}\|^2$$

и ограниченность нормы вектор-функции $\vec{R}$:

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{R_1^2 + \cdots + R_n^2} \leq \sqrt{n} C\|\vec{x}\|^2 = L\|\vec{x}\|^2. \qquad (10.4)$$

Введем обозначение $\frac{\partial f_i(0,\ldots,0)}{\partial x_j} = a_{ij}$, которое позволит записи системы (10.2) придать форму

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + R_i,\ \ (i = 1, \ldots, n) \qquad (10.5)$$

или векторную форму:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{R}, \qquad (10.6)$$

где $A = \{a_{ij}\}$ и $\vec{R} = (R_1, \ldots, R_n)^T$. Наряду с системой (10.6) будем рассматривать систему

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad (10.7)$$

которую будем называть *системой первого приближения*.

Выясним условия, при которых из устойчивости или неустойчивости системы первого приближения вытекает соответственно устойчивость или неустойчивость нулевого решения системы (10.1). Для этого нам потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма. Если W и V – две квадратичные формы, причем W является знакоопределенной формой, тогда функция

$$W + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i$$

будет знакоопределенной, совпадающей по знаку с W в некоторой окрестности начала координат.

Доказательство. Поскольку $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ есть линейная форма, то $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2$ – квадратичная форма, для которой справедлива оценка

$$\mu_{\min}\|\vec{x}\|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 \le \mu_{\max}\|\vec{x}\|^2, \tag{10.8}$$

где $\mu_{\min}$ и $\mu_{\max}$ – наименьшее и наибольшее собственные числа квадратичной формы. Аналогичная оценка имеет место и для квадратичной формы $W(\vec{x})$:

$$\nu_{\min}\|\vec{x}\|^2 \le W(\vec{x}) \le \nu_{\max}\|\vec{x}\|^2. \tag{10.9}$$

Из неравенства Коши−Буняковского следует:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_i^2}. \tag{10.10}$$

В левой части неравенства (10.10) стоит скалярное произведение двух векторов: $(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_1})$и $\vec{R} = (R_1, \dots, R_n)^T$. Это скалярное произведение можно обозначить как

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{x}}, \vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i.$$

Тогда (10.10) примет вид

$$\left|\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{x}}, \vec{R}\right)\right| \le \left\|\frac{\partial V}{\partial \vec{x}}\right\| \left\|\vec{R}\right\|. \tag{10.11}$$

Неравенство (10.11) означает, что абсолютная величина скалярного произведения двух векторов не превосходит произведения их длин. Из (10.11) с учетом (10.4) и (10.8) получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}R_i\right| = \left|\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{x}},\vec{R}\right)\right| \le L\sqrt{\mu_{\max}}\|x\|^3.$$

Предположим теперь, что квадратичная форма W – определенно отрицательная форма. Имеем неравенство

$$W + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}R_i \le (\nu_{\max} + L\sqrt{\mu_{\max}}\|\vec{x}\|)\|\vec{x}\|^2.$$

При выборе окрестности начала координат, в которой $L\sqrt{\mu_{\max}}\|\vec{x}\| < |\nu_{\max}|$, получаем неравенство $W + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}R_i < 0$ при $\|\vec{x}\| < 0$, т.е. функция $W + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}R_i$ будет знакоопределенной отрицательной и, следовательно, совпадать по знаку с W.

Если W – определенно положительная форма, то в окрестности начала координат, в которой $L\sqrt{\mu_{\max}}\|\vec{x}\| < \nu_{\min}$,

$$W + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}R_i > \left(\nu_{\min} - L\sqrt{\mu_{\max}}\|\vec{x}\|\right)\|\vec{x}\|^2 > 0$$

при $\|\vec{x}\| > 0$.

Теорема об устойчивости по первому приближению. Если корни характеристического полинома системы первого приближения имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение системы (10.1) асимптотически устойчиво.

В самом деле, существует определенно положительная квадратичная форма V, производная которой в силу системы первого приближения (10.7) равна $-\|\vec{x}\|^2$. Производная функции V в силу системы (10.6):

$$-\|\vec{x}\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}R_i$$

И, согласно лемме, будет определенно отрицательной.

Асимптотическая устойчивость теперь следует из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Отметим без доказательства справедливость следующего утверждения.

Теорема о неустойчивости по первому приближению. Если среди корней характеристического полинома системы первого приближения (10.7) имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то нулевое решение (10.6) неустойчиво.

Библиографический список

1. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1961.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
3. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
4. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980.
5. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Борис Павлович Родин

Методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Редактор *Г.М. Звягина*
Корректор *Л.А. Петрова*
Компьютерная верстка: *Н.А. Андреева*
Подписано в печать 12.02.2020. Формат 60×84/16. Бумага документная.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,65. Тираж 100 экз. Заказ № 25
Балтийский государственный технический университет
Типография БГТУ
190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д. 1